Федеральное государственное
научное учреждение
«Институт педагогических исследований
одаренности детей»
Российской академии образования

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Научный журнал

Основан в октябре 2008 года

Том 6

Выпуск 3

2013

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ОДАРЕННОСТИ ДЕТЕЙ»
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
Научный журнал. 2013. Т. 6, вып. 3

Свидетельство о регистрации средства массовой
информации ПИ № ФС77-36663 от 01 июля 2009г.

Оригинал-макет
Л.А. Дегтерева, Е.Н. Разинков

Адрес редколлегии:
630098, г. Новосибирск,
ул. Приморская, д. 22
Телефон: (383) 345-80-21
E-mail: edusoft@ngs.ru

Подписано в печать 16.09.2013.
Бумага офсетная №1. Формат 30 x 42/2.
Гарнитура Times New Roman.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 45.
Тираж 500 экз. Заказ № 05-13.

Издательство ИПИО РАО
г. Новосибирск, ул. Приморская, д.22

О научно-теоретических предпосылках понятий «Множество», «Высказывание» и «Событие» школьного курса математики (I)

УДК 372.851:510

Гончаров Сергей Савостьянович
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук
Россия, г. Новосибирск, проспект академика Коптюга, 4, телефон: (383) 333-28-92

Никитин Александр Александрович
Федеральное государственное научное учреждение
«Институт педагогических исследований одаренности детей»
Российской академии образования
Россия, г. Новосибирск, ул. Приморская, 22, телефон (383) 345-80-21

Дроботун Борис Николаевич
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова
Казахстан, г. Павлодар, ул. Ломова, 64, телефон: (7182) 67-36-76

Статья посвящена выявлению генетических предпосылок, обусловивших необходимость включения теоретико-множественных, логико-алгебраических и теоретико-вероятностных концепций в содержание школьного математического образования и разработке ,научно-теоретических оснований, обеспечивающих возможности построения единой методической системы обучения этим концепциям. В данной статье предлагается опыт выявления общего подхода к представлению алгебр множеств, высказываний, и событий, как идейно-методологической основы изучения понятий «Множество», «Высказывание» и «Событие» в рамках школьных математических дисциплин.

Ключевые слова: множество, высказывание, событие, булева алгебра, алгебра высказываний, алгебра событий, алгебра множеств, булева функция, гомоморфизм, изоморфизм.

1. Введение. С включением в содержание школьного математического образования дисциплины «Информатика» и нового раздела «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей», как дополнительного раздела дисциплины «Алгебра и начала анализа», в школьную математику прочно вошли понятия «Высказывание» и «Событие». Эти понятия, наряду с понятием «Множество», относятся к числу фундаментальных понятий современной науки.

Предпринятое обогащение содержания школьного курса математики явилось важнейшей позитивной вехой на пути реформирования школьного математического образования, направленного на обеспечение его адекватности реалиям и запросам информационной эры развития общества. Этот шаг явился не только ответом на запросы времени, но и наполнил особым смыслом процесс постижения математики, придавая ее изучению прикладную направленность нетрадиционного характера и мотивируя необходимость освоения ее методов, как теоретической основы, средствами которой обеспечиваются возможности построения математических моделей объектов и явлений реального мира и разработки технологий их компьютерного представления и анализа.

Следует отметить, что с логико-алгебраических позиций, совокупности высказываний, событий и подмножеств (данного непустого множества) с соответствующими системами операций являются конкретными генетическими прообразами абстрактных объектов одного и того же класса - класса булевых алгебр.

В историческом плане практика оперирования с понятиями «Множество», «Высказывание» и «Событие» обусловила создание единого формального языка, синтаксические возможности которого позволили выразить свойства как этих понятий, так и многих других математических понятий и структур. Этот язык возник первоначально в качестве символического языка одного из разделов формальной логики, известного ныне как «Алгебра высказываний». Создатель наиболее продуктивной версии этого языка Дж. Буль в своих основных научных трудах «Математический анализ логики, являющийся опытом исчисления дедуктивного рассуждения» (The mathematical analysis of logic, being an essay towargs a calculus of deductive reasoning [1]) и «Исследование законов мышления, на которых основываются математические теории логики и вероятностей» (An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probability [2]) заложил основы современной математической логики и отчетливо указал на глубокую связь между основными понятиями построенного им логического исчисления и основными понятиями теории вероятностей. В то же время, давая количественные истолкования объектов и совокупностей объектов логики и теории вероятностей, он выявлял их связи с теоретико-множественными концепциями.

Дж. Буль подчеркивал, что сущность построенного им исчисления состоит «… в особенностях операций и законов, которым подчиняются эти операции: «Те, кто знаком с настоящим состоянием символической алгебры, отдают себе отчет в том, что обоснованность процессов анализа зависит не от интерпретации используемых символов, а от законов их комбинирования. Каждая интерпретация, сохраняющая предложенные отношения, равно допустима, и подобный процесс анализа может, таким образом, при одной интерпретации представлять решение вопроса, связанного со свойствами чисел, при другой - решение геометрической задачи и при третьей - решение проблемы динамики или оптики. Необходимо подчеркнуть фундаментальность этого принципа…».

Именно в этом и состоит то принципиально новое, что внес Буль в представление об исчислении, - в ясном осознании абстрактности исчисления, в том, что исчисление определяется теми законами, которым мы подчиним операции» ([3], стр. 22-23)

Возможность создания и применения единого формально-символического аппарата для описания свойств множеств, событий и высказываний основывается на далеко идущих аналогиях между ними. Ниже приводятся некоторые из этих аналогий (знакомство с ними предопределяет специфику приводимых далее описаний каждого из понятий «множество», «событие» и «высказывание» в терминах других):

1) множество может содержать или не содержать данный элемент; событие может произойти или не произойти; высказывание может быть истинным или ложным.

2) среди множеств выделяются универсальные и пустые; среди событий -достоверные и невозможные; среди высказываний - тождественно ложные и тождественно истинные;

3) множество полностью определяется своими элементами; событие - совокупностью исходов ему благоприятствующих; высказывание - совокупностью наборов значений для переменных, на которых оно является истинным;

4) между множествами может существовать связь, определяемая отношением включения (быть подмножеством); между высказываниями - логическая связь; между событиями - причинно-следственная связь.

В соответствии с этим, проблема определения общих подходов к проведению линий «множества», «высказывания» и «события», в процессе обучения школьным математическим дисциплинам, является одной из наиболее актуальных дидактических проблем.

Тем не менее, несмотря на общность генетических, идейно-методологических и научно-теоретических предпосылок, обусловивших место понятий «Множество», «Событие» и «Высказывание» в ряду важнейших понятий современной школьной математики, задача, связанная с выявлением возможностей создания общей педагогической системы обучения этим понятиям, в рамках школьной дидактики еще не ставилась.

Предлагаемая статья является первой частью работы, посвященной выявлению генетических предпосылок, обусловивших необходимость включения теоретико-множественных, логико-алгебраических и теоретико-вероятностных концепций в содержание школьного математического образования и разработке подходов к построению методической системы обучения этим концепциям средствами школьных математических дисциплин.

В данной статье, в качестве единой научно-теоретической основы обучения понятиям «Множество», «Высказывание» и «Событие» берется концепция булевой алгебры. Булевы алгебры, обладая возможностями проявления алгебраических, порядковых, топологических и других структурных свойств, присущих многим классам алгебраических систем, представляют собой идеальное поле для представления и изучения этих понятий.

Как отмечается в работе [4]: « абстрактная концепция булевой алгебры, явившись формальным обобщением аналогий, связанных с логико-алгебраическими, теоретико-множественными и теоретико-вероятностными представлениями, нашла, благодаря теореме Стоуна, свою универсальную характеризацию на языке теории множеств, т.е. в терминах первичных представлений, породивших эту концепцию.» ([4], стр.57)

В частности, алгебра подмножеств любого непустого множества относительно теоретико-множественных операций, является булевой алгеброй. Булевыми алгебрами являются и некоторые (естественным образом определенные) гомоморфные образы алгебры высказываний и алгебры событий относительно соответствующих систем логических и теоретико-вероятностных операций.

Возможности установления изоморфных отображений между этими алгебрами позволяют получать описания каждой из них в терминах (на языке, в понятийно-терминологической базе) других, что является убедительной демонстрацией справедливости вышеприведенного высказывания Дж. Буля об абстрактности законов, формально определяющих свойства операций логических исчислений. Алгебры множеств, событий и высказываний, как алгебры одной и той же сигнатуры, являются реальными воплощениями различных интерпретаций символов этой сигнатуры, что позволяет (за счет единых, отраженных в аксиомах, законов их комбинирования) при одной интерпретации «представлять решение вопроса, связанного» с теорией вероятностей, при другой - решение задачи теоретико-множественного характера, при третьей - решение проблемы математической логики.

В качестве базовых объектов, на основе изоморфных аналогов которых получаются в дальнейшем описания каждой из алгебр множеств, высказываний и событий (в понятийно-терминологической базе других алгебр) берутся булева алгебра подмножеств непустого множества и булева алгебра функций алгебры логики.

2. Булевы алгебры. Система аксиом, как формул сигнатуры $\sigma = \langle {F_1}^2; {F_2}^2; {F_3}^1;\ c_1;\ c_2 \rangle$, посредством которой задается класс булевых алгебр, имеет вид:

1) $(\forall x)(\forall y)\left({F_1}^2(x;y) = {F_1}^2(y;x)\right)$;

2) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\left({F_1}^2\left({F_1}^2(x;y);z\right) = {F_1}^2\left(x;\ {F_1}^2(y;z)\right)\right)$;

3) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\left({F_2}^2\left({F_1}^2(x;y);z\right) = {F_1}^2\left({F_2}^2(x;z);\ {F_2}^2(y;z)\right)\right)$;

4) $(\forall x)(\forall y)\left({F_3}^1\left({F_1}^2(x;y)\right) = {F_2}^2\left({F_3}^1(x);\ {F_3}^1(y)\right)\right)$;

5) $(\forall x)\left({F_1}^2(x;x) = x\right)$;

6) $(\forall x)(\forall y)\left({F_1}^2\left({F_2}^2\left(x;{F_3}^1(x)\right);y\right) = y\right)$;

7) $(\forall x)\left({F_3}^1\left({F_3}^1(x)\right) = x\right)$;

8) $(\forall x)\left({F_2}^2\left(x;{F_3}^1(x)\right) = c_1\right)$;

9) $(\forall x)\left({F_1}^2\left(x;{F_3}^1(x)\right) = c_2\right)$.

Заметим, что бескванторные подформулы аксиом 1) - 9) представляют собой «равенства» термов $t_1 = t_1(x;y;z)$ и $t_2 = t_2(x;y;z)$ сигнатуры σ над множеством переменных $X = \{x_i / i \in N\}$, $(x;y;z \in X)$. Тем самым, выполнимость этих аксиом на непустом множестве M, при конкретной интерпретации φ символов сигнатуры σ, означает равенство значений термальных операций ${}^{\varphi}t_1$ и ${}^{\varphi}t_2$ алгебры $\mathrm{M} = \langle M;\ {}^{\varphi}\sigma \rangle$, соответствующих этим термам, при любых значениях переменных $x; y; z$ из множества M.

Алгебраические операции и выделенные элементы, соответствующие функциональным символам и символам выделенных элементов (при интерпретации φ сигнатуры σ на множестве M) будем обозначать через $\sqcup; \sqcap; C;$ и $0; 1$ (или этими же символами с натуральными индексами), соответственно.

Общее определение гомоморфизма алгебр [5], применительно к алгебрам сигнатуры σ, примет тогда следующий вид.

Пусть $\mathrm{M}_1 = \langle M_1; \sqcup_1; \sqcap_1; C_1; 0_1; 1_1 \rangle$ и $\mathrm{M}_2 = \langle M_2; \sqcup_2; \sqcap_2; C_2; 0_2; 1_2 \rangle$ - алгебры сигнатуры σ. Отображение $\varphi: M_1 \to M_2$ основного множества M_1 алгебры M_1 в основное множество M_2 алгебры M_2 называется гомоморфизмом M_1 в M_2, если выполняются следующие условия:

1) $\Phi(a \sqcup_1 b) = \Phi(a) \sqcup_2 \Phi(b)$;

2) $\Phi(a \sqcap_1 b) = \Phi(a) \sqcap_2 \Phi(b)$;

3) $\Phi\big(C_1(a)\big) = C_2\big(\Phi(a)\big)$;

4) $\Phi(0_1) = 0_2$;

5) $\Phi(1_1) = 1_2$,

для любых элементов $a; b \in M_1$.

При выполнении условий 1) - 5) говорят, что отображение Φ «сохраняет» основные операции и выделенные элементы.

Нетрудно проверить, что образ $Im\,\Phi$ множества M_1 при отображении Φ является подмножеством множества M_2, замкнутым относительно основных операций алгебры M_2 и содержащим выделенные элементы этой алгебры. Это позволяет определить алгебру

$\boldsymbol{Im\,\Phi} = \langle Im\Phi; \sqcup_2; \sqcap_2; C_2; 0_2; 1_2 \rangle$

сигнатуры σ, которая называется подалгеброй алгебры M_2.

Если (в определении гомоморфизма) отображение Φ является биективным отображением M_1 на M_2, то получается определение изоморфного отображения алгебры M_1 на M_2 (символически $\mathrm{M}_1 \cong \mathrm{M}_2$).

С произвольным отображением $\Phi: M_1 \to M_2$ связывается бинарное отношение P_Φ на множестве M_1, которое определяется по следующему правилу:

$(\forall a; b \in M_1)\Big(\big(aP_\Phi b\big) \Leftrightarrow \big(\Phi(a) = \Phi(b)\big)\Big)$.

Легко видеть, что отношение P_Φ является отношением эквивалентности. Если же Φ является гомоморфным отображением алгебры M_1 в алгебру M_2, то отношение P_Φ будет отношением эквивалентности, стабильным относительно основных операций алгебры M_1, т.е.

i) $(a_1 \sqcup_1 a_2)P_\Phi(b_1 \sqcup_1 b_2)$;

ii) $(a_1 \sqcap_1 a_2)P_\Phi(b_1 \sqcap_1 b_2)$;

iii) $C_1(a_1)\, P_\Phi C_1(b_1)$

для любых $a_1; a_2; b_1; b_2 \in M$ таких, что $a_1 P_\Phi b_1$ и $a_2 P_\Phi b_2$.

Другими словами, если соответственные координаты наборов $(a_1; a_2)$ и $(b_1; b_2)$ лежат в одних и тех же классах эквивалентности, то и результаты основных операций алгебры M_1 на этих наборах также принадлежат одному и тому же классу эквивалентности.

Вышеприведенное замечание позволяет на фактор-множестве M_1/P_Φ определить (каноническим образом) структуру алгебры сигнатуры σ. Делается это следующим образом [4]. Определим на M_1/P_Φ интерпретацию ψ сигнатуры σ, полагая:

$\psi(F_1^2) = \sqcup^*; \psi(F_2^2) = \sqcap^*; \psi(F_3^1) = C^*; \psi(c_1) = 0^*; \psi(c_2) = 1^*$,

где:

а) $[a]_{P_\Phi} \sqcup^* [b]_{P_\Phi} = [a \sqcup_1 b]_{P_\Phi}$;

б) $[a]_{P_\Phi} \sqcap^* [b]_{P_\Phi} = [a \sqcap_1 b]_{P_\Phi}$;

в) $C^*([a]_{P_\Phi}) = [C_1(a)]_{P_\Phi}$;

г) $0^* = [0_1]_{P_\Phi}$;

д) $1^* = [1_1]_{P_\Phi}$,

для любых $[a]_{P_\Phi}; [b]_{P_\Phi} \in M_1/P_\Phi$.

Как показывают равенства а) - в), результатами операций $\sqcup^*$, $\sqcap^*$, C^*на классах эквивалентности $[a]_{P_\Phi}$и $[b]_{P_\Phi}$ объявляются классы эквивалентности, содержащие результаты соответствующих операции $\sqcup_1; \sqcap_1; C_1$ алгебры M_1 на представителях a и b из этих классов. Стабильность отношения P_Φ относительно операций $\sqcup_1; \sqcap_1; C_1$ обеспечивает корректность определений а) - в) операций $\sqcup_1^*; \sqcap_1^*; C_1^*$, т.е. независимость этих операций от выбора представителей в классах эквивалентности (смотри утверждения *i*) - *iii*)).

Таким образом, система $\langle M_1/P_\Phi ; \sqcup^*; \sqcap^*; C^*; 0^*; 1^*\rangle$ является алгеброй сигнатуры σ, которая называется фактор-алгеброй алгебры M_1 по конгруэнции P_Φ и обозначается через $\mathrm{M}_1/\boldsymbol{P_\Phi}$.

Согласно первой теореме о гомоморфизмах алгебраических систем [4], полученная алгебра изоморфна подалгебре $\boldsymbol{Im\ \Phi}$ алгебры M_2, т.е. $\mathrm{M}_1/\boldsymbol{P_\Phi} \cong \boldsymbol{Im\ \Phi}$. Если же гомоморфизм Φ является сюръективным, то $\mathrm{M}_1/\boldsymbol{P_\Phi} \cong \mathrm{M}_2$.

Заметим, что применительно к булевым алгебрам M_1 и M_2 определение гомоморфизма (т.е. определение этого понятия для произвольных алгебр сигнатуры σ) является избыточным. А именно, можно показать [5], что для того чтобы отображение Φ являлось гомоморфизмом булевых алгебр, достаточно потребовать выполнения только условий 1) и 3) (или 2) и 3)) общего определения.

3. Алгебра подмножеств. Одним из традиционных примеров булевой алгебры являются алгебра

$\mathrm{B}(M) = \langle B(M); \cup; \cap; \overline{}; \emptyset; M\rangle$

подмножеств непустого множества M при интерпретации φ сигнатуры σ, которая определяется на множестве $B(M)$ по правилу:

$$\varphi(F_1{}^2) = \cap;\ \varphi(F_2{}^2) = \cup;\ \varphi(F_3{}^1) = \overline{};\ \varphi(c_1) = \emptyset;\ \varphi(c_2) = M.$$

Действительно, при этой интерпретации аксиомы 1) – 9) примут вид следующих утверждений:

1´) $(x \cup y) = (y \cup x)$;

2´) $\big((x \cap y) \cup z\big) = (x \cup (y \cup z))$;

3´) $\big((x \cup y) \cap z\big) = (x \cap z) \cup (y \cap z)$;

4´) $(\overline{x \cup y}) = (\bar{x} \cap \bar{y})$;

5´) $(x \cup x) = x$;

6´) $(x \cap \bar{x}) \cup y = y$;

7´) $\overline{(\bar{x})} = x$;

8´) $(x \cap \bar{x}) = \emptyset$;

$9')\ (x \cup \bar{x}) = M$,

отражающих свойства теоретико-множественных операций $\cup; \cap;\ ^{-}$ и выделенных элементов $\emptyset; M$.

Таким образом, с учетом вышеприведенного замечания, проверка выполнимости аксиом 1) - 9) на множестве $B(M)$, при интерпретации φ, сводится к доказательству того, что утверждения $1')$ - $9')$ являются равенствами, верными для всех значений переменных $x; y; z$ из множества $B(M)$, т.е. тождествами на этом множестве.

Заметим, что каждое из этих утверждений при конкретных значениях $A; B; C \in B(M)$ для переменных $x; y; z$, соответственно, превращается в обычное теоретико-множественное равенство, которое может быть доказано методом включений и проиллюстрировано на диаграммах Эйлера-Венна.

Утверждение $4')$ при указанных значениях переменных примет, в частности, вид конкретного равенства $(\overline{A \cup B}) = (\bar{A} \cap \bar{B})$.

Для доказательства того, что это равенство является верным, нужно доказать, в соответствии с предписаниями метода включений, что:

а) $(\overline{A \cup B}) \subseteq (\bar{A} \cap \bar{B})$;

б) $(\bar{A} \cap \bar{B}) \subseteq (\overline{A \cup B})$.

Доказательства утверждений а) и б) основываются на определениях теоретико-множественных операций $\cup; \cap;\ ^{-}$ - «объединения», «пересечения», «дополнения», соответственно, и отношения $\subseteq$ - « включения (быть подмножеством)».

Приведем для примера, доказательство утверждения а), располагая его отдельные умозаключения в единую цепь импликативного характера. Пусть $x \in (\overline{A \cup B})$, тогда:

$$(x \in (\overline{A \cup B})) \Rightarrow^{①} \Big(x \in \big(M\backslash(A \cup B)\big)\Big) \Rightarrow^{②} \Big((x \in M)\&\big(x \notin (A \cup B)\big)\Big) \Rightarrow^{③}$$

$$\Rightarrow \Big((x \in M)\&\big((x \notin A)\&(x \notin B)\big)\Big) \Rightarrow^{④} \Big(((x \in M)\&\big(x \notin A)\big)\&((x \in M)\&(x \notin B)\big)\Big) \Rightarrow^{⑤}$$

$$\Rightarrow ((x \in (M\backslash A))\&(x \in (M\backslash B))) \Rightarrow^{⑥} (x \in ((M\backslash A) \cap (M\backslash B))).\ (1)$$

Отметим, что в цепочке (1) - логических следований:

- переход ① основывается на определении унарной операции $^{-}$ - «дополнения подмножества в множестве M»;

- переходы ② и ⑤ - на определении бинарной операции \ - «разности множеств»;

- переход ④ сделан на основании законов коммутативности, ассоциативности и идемпотентности логической операции & - «конъюнкция»;

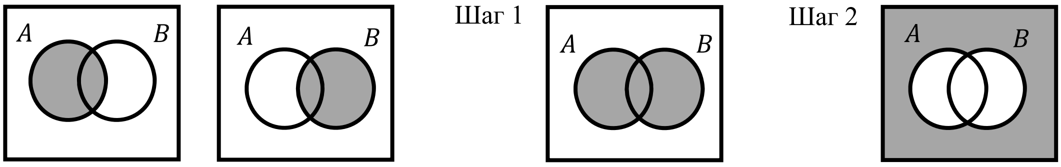
- переход ⑥ - на основании определения бинарной операции ∩ - «пересечения».

Для того, чтобы проиллюстрировать верность равенства $(\overline{A \cup B}) = (\bar{A} \cap \bar{B})$ нужно построить диаграммы Эйлера-Венна для множеств, стоящих в левой и правой частях этого равенства и убедиться в том, что на (полученных диаграммах) области, соответствующие этим множествам, совпадают.

Левая и правая части равенства $(\overline{A \cup B}) = (\bar{A} \cap \bar{B})$ являются значениями термальных операций ${}^{\varphi}t_1(x; y) = (\overline{x \cup y})$ и ${}^{\varphi}t_2(x; y) = (\bar{x} \cup \bar{y})$ алгебры $\mathrm{B}(M) = \langle B(M); \cup; \cap;\ ^{-}; \emptyset; M\rangle$ при

$x = A$; $y = B, (A; B \in B(M))$. Соответствующие этим операциям термы $F_3^1(F_2^2(x; y))$ и $F_1^2(F_3^1(x); F_3^1(y))$ сигнатуры σ имеют сложность 2. Таким образом, процедура индуктивного построения диаграммы Эйлера-Венна для каждого из множеств $(\overline{A \cup B})$ и $(\bar{A} \cap \bar{B})$ будет состоять из шагов 0; 1; 2 (смотри рисунок 1. а), б), в), г) и рисунок 2. а), б), в), г); д)), соответственно.

Шаг 0 Шаг 1 Шаг 2

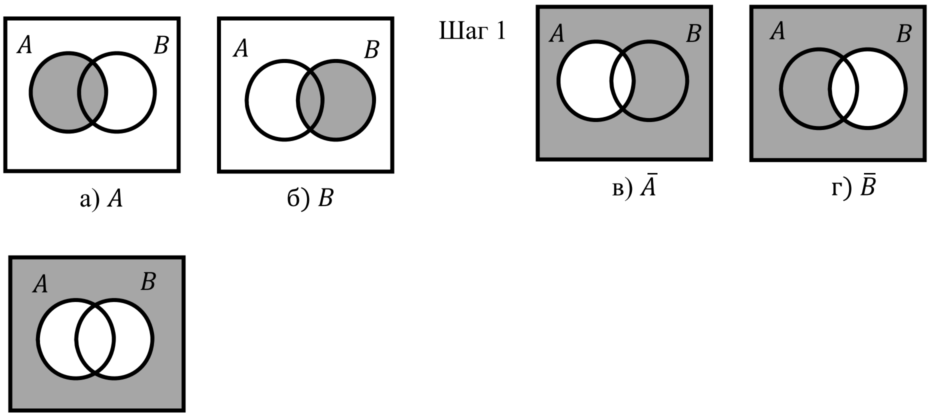


а) A б) B в) $(A \cup B)$ г) $(\overline{A \cup B})$

Рисунок 1. Пошаговое построение диаграммы Эйлера Венна для множества $(\overline{A \cup B})$.

Шаг 0 Шаг 1

Шаг 2



а) A б) B в) $\bar{A}$ г) $\bar{B}$

д) $(\bar{A} \cup \bar{B})$

Рисунок 2. Пошаговое построение диаграммы Эйлера Венна для множества $(\bar{A} \cup \bar{B})$

4. Алгебра булевых функций. В качестве второго примера булевой алгебры рассмотрим алгебру булевых функций (функций алгебры логики). Эта алгебра, как алгебра сигнатуры σ, задается следующим образом.

Пусть $E = \{0; 1\}$ и $E^n = \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ раз}}$ - n-я декартова степень множества E, т.е.

$E^n = \{(\sigma_1; \sigma_2; \ldots; \sigma_n) / \sigma_i \in E,\ i = 1; 2; \ldots; n\}$,

Булевой функцией $f = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ от n переменных $x_1; x_2; \ldots; x_n$ называется отображение $f: E^n \to E$.

Для любого набора $\tilde{\sigma}^{(n)} = (\sigma_1; \sigma_2; \ldots; \sigma_n) \in E^n$, через $f(\tilde{\sigma}^{(n)})$ (или через $f(\sigma_1; \sigma_2; \ldots; \sigma_n)$) будем обозначать образ n-ки $(\sigma_1; \sigma_2; \ldots; \sigma_n)$ при отображении *f*. Этот образ будет называться значением функции *f* при $x_1 = \sigma_1; x_2 = \sigma_2; \ldots; x_n = \sigma_n$ или ее значением на наборе $\tilde{\sigma}^{(n)}$.

Множество всех булевых функций от n переменных $x_1; x_2; \ldots; x_n$ будем обозначать через B_n.

Определим на множестве B_n операции $\vee; \&; \overline{}$ и элементы $f_0; f_1$ по следующим правилам. Пусть $f; g \in B_n$. Положим

а) $(f \vee g)\,(\sigma_1;\ \sigma_2; \dots; \sigma_n) = \max\{f(\sigma_1;\ \sigma_2; \dots; \sigma_n); g(\sigma_1;\ \sigma_2; \dots; \sigma_n)\}$;

б) $(f \ \&\ g)\,(\sigma_1;\ \sigma_2; \dots; \sigma_n) = \min\{f(\sigma_1;\ \sigma_2; \dots; \sigma_n); g(\sigma_1;\ \sigma_2; \dots; \sigma_n)\}$;

в) $\bar{f}(\sigma_1;\ \sigma_2; \dots; \sigma_n) = 1 - f(\sigma_1;\ \sigma_2; \dots; \sigma_n)$, где $-$ - обычная операция вычитания на числовых множествах;

в) $f_0(\sigma_1;\ \sigma_2; \dots; \sigma_n) = 0$;

г) $f_1(\sigma_1;\ \sigma_2; \dots; \sigma_n) = 1$,

для любого набора $(\sigma_1;\ \sigma_2; \dots; \sigma_n) \in E^n$.

Нетрудно заметить, что множество B_n замкнуто относительно операций $\vee; \&; \overline{}$. Таким образом, эти операции являются алгебраическими на множестве B_n. Нетрудно проверить также, что функции f_0 и f_1 являются нейтральными элементами относительно операций $\vee$ и $\&$, соответственно. Исходя из этого, получаем алгебру

$\mathrm{B}_n = \langle B_n; \vee; \&; \overline{}; f_0; f_1 \rangle$,

которая называется алгеброй булевых функций (или функций алгебры логики) от *n* переменных.

Эту алгебру можно считать алгеброй сигнатуры σ, если полагать что функциональные символы F_1^2; F_2^2 и F_3^1 этой сигнатуры проинтерпретированы, как операции $\vee; \&$ и $\overline{}$, соответственно, а константные символы c_1 и c_2 - как элементы f_0 и f_1.

Покажем, что при этой интерпретации аксиомы 1) - 9), определяющие класс булевых алгебр, будут на алгебре B_n выполняться. Проверим, к примеру, это утверждение для аксиомы 4). Отметим, что при $x = f_1$; $y = f_2$ $(f_1; f_2 \in B_n)$ эта аксиома примет вид;

$\overline{f_1 \ \vee\ f_2} = \bar{f_1} \ \&\ \bar{f_2}$.

Для доказательства полученного равенства нужно убедиться в том, что функции, стоящие в левой и правой его частях, принимают одинаковые значения на любом наборе $\tilde{\sigma}^{(n)} \in E^{(n)}$. Действительно:

$$\left(\overline{f_1 \ \vee\ f_2}\right)\left(\tilde{\sigma}^{(n)}\right) = 1 - (f_1 \ \vee\ f_2)\left(\tilde{\sigma}^{(n)}\right) = 1 - \max\{f_1\left(\tilde{\sigma}^{(n)}\right); f_2\left(\ \tilde{\sigma}^{(n)}\ \right)\} =$$
$$= \begin{cases} 1, \text{если } \max\{f_1\left(\tilde{\sigma}^{(n)}\right); f_2\left(\ \tilde{\sigma}^{(n)}\ \right)\} = 0; \\ 0, \text{если } \max\{f_1\left(\tilde{\sigma}^{(n)}\right); f_2\left(\ \tilde{\sigma}^{(n)}\ \right)\} = 1. \end{cases} \qquad (2)$$

$$(\bar{f_1} \ \&\ \bar{f_2})\left(\tilde{\sigma}^{(n)}\right) = \min\{\bar{f_1}\left(\tilde{\sigma}^{(n)}\right);\ \bar{f_2}\left(\ \tilde{\sigma}^{(n)}\ \right)\} = \min\{1 - f_1\left(\tilde{\sigma}^{(n)}\right); 1 - f_2\left(\ \tilde{\sigma}^{(n)}\ \right)\} =$$
$$= \begin{cases} 1, \text{если } \max\{f_1\left(\tilde{\sigma}^{(n)}\right); f_2\left(\ \tilde{\sigma}^{(n)}\ \right)\} = 0; \\ 0, \text{если } \max\{f_1\left(\tilde{\sigma}^{(n)}\right); f_2\left(\ \tilde{\sigma}^{(n)}\ \right)\} = 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что при указанной интерпретации аксиома 4) является истинной. Доказательство того, что остальные аксиомы также будут на B_n истинными осуществляется аналогично. Таким образом, алгебра B_n действительно является булевой алгеброй.

5. Алгебра высказываний. Множество L всех высказываний $\boldsymbol{A}$ от пропозициональных переменных X_1; $X_2; \dots; X_t; \dots$ $(t \in N)$ задается посредством метода индуктивных определений. Одновременно с индуктивным построением высказывания $\boldsymbol{A}$ определяется сложность

$S(\boldsymbol{A})$ этого высказывания. Фактически сложность $S(\boldsymbol{A})$ будет выступать, в процессе построения множества L, в роли параметра индукции.

а) **Базис индукции.** Каждая пропозициональная переменная X_t объявляется высказыванием, при этом считается, что $S(X_t) = 0,\ t \in N$.

б) **Индукционное предположение**. Предполагается, что все высказывания $\boldsymbol{A}$**,** сложность которых не превосходит k $(k > 0)$, уже построены.

в) **Индукционный шаг**. Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ - произвольные (уже построенные) высказывания, т.е. $S(\boldsymbol{A}) \le k$ и $S(\boldsymbol{B}) \le k$. Тогда выражения:

$(\boldsymbol{A}\&\boldsymbol{B})$**;** $(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})$**;** $(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$**;** $(\boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{B})$**;** $\neg \boldsymbol{A}$

также объявляются высказываниями, при этом считается, что $S(\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{B}) = \max\{S(\boldsymbol{A}); S(\boldsymbol{B})\} + 1$, где $\Delta \in \{\&; \vee;\ \to;\ \leftrightarrow;\ \neg\}$ и $S(\neg\boldsymbol{A}) = S(\boldsymbol{A}) + 1$.

Высказывания $\boldsymbol{A}$ из L будут называться формулами, при этом высказывания сложности 0 будут называться атомными формулами. Далее запись $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(X_1;\ X_2; \dots; X_t)$ будет означать, что в процессе индуктивного построения формулы $\boldsymbol{A}$ использовались пропозициональные переменные только из совокупности $\{X_1;\ X_2; \dots; X_t\}$.

Множество L, в соответствии с его индуктивным определением, является замкнутым относительно применения логических связок &; ∨; →; ↔; ¬, т.е. посредством этих связок на L определяются логические операции, которые обычно обозначаются теми же символами, что и соответствующие им логические связки. Замкнутость множества L относительно этих логических операций позволяет определить алгебру

$\boldsymbol{L} = \langle L;\ \&; \vee;\ \to;\ \leftrightarrow;\ \neg\rangle$,

которая называется алгеброй высказываний. Полагая

$L_n = \{\boldsymbol{A}/(\boldsymbol{A} \in L)\ \&\ (\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(X_1;\ X_2; \dots; X_n))\}$,

получаем подалгебру

$\boldsymbol{L}_n = \langle L_n;\ \&; \vee;\ \to;\ \leftrightarrow;\ \neg\rangle$

алгебры $\boldsymbol{L}$.

Процедура наделения формул $\boldsymbol{A} \in L$ содержательным смыслом называется семантической интерпретацией. Посредством классической истинностной семантики каждой формуле $\boldsymbol{A}$ из L приписывается (в качестве истинностного значения) или «истина» или «ложь», при этом в данном контексте союз «или» употребляется в категорическом смысле. Процесс семантической интерпретации начинается с означивания, заключающегося в приписывании каждой атомной формуле из L одного из элементов двухэлементного множества $\{и; л\}$. Затем это означивание, как отображение из множества $\{X_1;\ X_2; \dots; X_t; \dots\}$ в множество $\{и; л\}$, распространяется (в соответствии с правилами классической истинностной семантики) на отображение всего множества L в множество $\{и; л\}$.

Таким образом, семантическую интерпретацию (в истинностной семантике) можно рассматривать как отображение $\varphi: L \to \{\text{ложь}; \text{истина}\}$ (или $\varphi: L \to \{\text{л}; \text{и}\}$). Отображение φ определяется индукцией по параметру $S(\boldsymbol{A})$**.**

а) **Базис индукции.** $(S(\boldsymbol{A}) = 0)$**.** В этом случае $\boldsymbol{A} = X_k$ $(k \in N)$ и в качестве $\varphi(\boldsymbol{A})$ берется любое (но фиксированное для дальнейшего) значение из множества $\{л; и\}$. Таким образом, на формулах сложности 0 отображение φ задается произвольно.

б) **Индукционное предположение** $(S(\boldsymbol{A}) \leq k; k > 0)$**.** Предполагается, что для любой формулы $\boldsymbol{A}$, сложность которой не превосходит k, истинностное значение $\varphi(\boldsymbol{A})$ уже определено.

в) **Индукционный шаг** $(S(\boldsymbol{A}) = k + 1)$. В этом случае, согласно индукционному определению множества L, для формулы $\boldsymbol{A}$ может иметь место одна из возможностей:

в.1) $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} \& \boldsymbol{C})$;

в.2) $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C})$;

в.3) $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C})$;

в.4) $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} \leftrightarrow \boldsymbol{C})$;

в.5) $\boldsymbol{A} = \neg \boldsymbol{B}$,

для некоторых формул $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ из L таких, что $S(\boldsymbol{B}) \leq k$ и $S(\boldsymbol{C}) \leq k$. Так как сложности формул $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ не превосходят k, то (с учетом индукционного предположения) можно считать, что истинностные значения $\varphi(\boldsymbol{B})$ и $\varphi(\boldsymbol{C})$ формул $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ уже определены. Тогда полагаем:

в.1) $\varphi(\boldsymbol{A}) = \varphi(\boldsymbol{B}) \& \varphi(\boldsymbol{C})$;

в.2) $\varphi(\boldsymbol{A}) = \varphi(\boldsymbol{B}) \vee \varphi(\boldsymbol{C})$;

в.3) $\varphi(\boldsymbol{A}) = \varphi(\boldsymbol{B}) \rightarrow \varphi(\boldsymbol{C})$;

в.4) $\varphi(\boldsymbol{A}) = \varphi(\boldsymbol{B}) \leftrightarrow \varphi(\boldsymbol{C})$;

в.5) $\varphi(\boldsymbol{A}) = \neg \varphi(\boldsymbol{B})$,

при этом значения правых частей равенств в.1) - в.5) определяются в соответствии со следующей таблицей (смотри таблицу 1):

Таблица 1. Правила классической истинностной семантики

$\varphi(\boldsymbol{B})$	$\varphi(\boldsymbol{C})$	$\varphi(\boldsymbol{B}) \& \varphi(\boldsymbol{C})$	$\varphi(\boldsymbol{B}) \vee \varphi(\boldsymbol{C})$	$\varphi(\boldsymbol{B}) \rightarrow \varphi(\boldsymbol{C})$	$\varphi(\boldsymbol{B}) \leftrightarrow \varphi(\boldsymbol{C})$	$\neg \varphi(\boldsymbol{B})$
		л	*л*	*и*	*и*	*и*
		л	*и*	*и*	*л*	*и*
		л	*и*	*л*	*л*	*л*
		и	*и*	*и*	*и*	*л*

Заметим, что семантическая интерпретация φ, как отображение из множества L в множество $\{л; и\}$, полностью определяется своими значениями на атомных формулах из L, которые, в соответствии с пунктом а) индуктивного определения семантической интерпретации φ, задаются произвольно. Таким образом, исходя из другого означивания пропозициональных переменных X_t $(t \in N)$ получается другая семантическая интерпретация $\psi: L \rightarrow \{л; и\}$.

Нетрудно видеть, что ограничение каждого из означиваний множества $\{X_1; X_2; \dots; X_t; \dots\}$, $t \in N$, всех пропозициональных переменных на подмножество

$\{X_1;\ X_2; \dots; X_n\}$ этого множества, приводит к семантической интерпретации множества формул из L_n.

Каждое такое ограничение может быть отождествлено с двоичным набором $(\sigma_1;\ \sigma_2; \dots; \sigma_n)$, $\sigma_i \in \{л; и\}$ $(i = 1; 2; \dots; n)$ значений для переменных $X_1;\ X_2; \dots; X_n$, соответственно. Отсюда непосредственно вытекает, что число всевозможных семантических интерпретаций формул из множества L_n равно 2^n.

Далее, вместо множества $\{л; и\}$ будем рассматривать множество $\{0; 1\}$. В соответствии с этим, полная информация о возможных истинностных значениях каждой формулы $\boldsymbol{A} = =\boldsymbol{A}(X_1;\ X_2; \dots; X_n) \in L_n$ при всех этих интерпретациях может быть представлена конечной таблицей вида (смотри таблицу 2):

Таблица 2. Таблица истинности формулы $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(X_1;\ X_2; \dots; X_n)$

X_1	X_2	…	X_n	$\boldsymbol{A}(X_1;\ X_2; \dots; X_n)$
		…		$\boldsymbol{A}(0;\ 0; \dots; 0)$
		…		… …
σ_1	σ_2	…	σ_n	$\boldsymbol{A}(\sigma_1;\ \sigma_2; \dots; \sigma_n)$
		…		… …
		…		$\boldsymbol{A}(1;\ 1; \dots; 1)$

2^n строк

Под стандартным номером набора $\tilde{\sigma}^{(n)} = (\sigma_1;\ \sigma_2; \dots; \sigma_n)$, $\sigma_i \in \{0; 1\}$ $(i = 1; 2; \dots; n)$, будем понимать число

$$\gamma\left(\tilde{\sigma}^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i \cdot 2^{n-i}) \qquad (4)$$

Из (4) следует, что набор $\tilde{\sigma}^{(n)}$ является двоичным разложением натурального числа $\gamma\left(\tilde{\sigma}^{(n)}\right)$, т.е. записью этого числа в двоичной системе счисления.

В дальнейшем будем всегда предполагать, что двоичные наборы $(\sigma_1;\ \sigma_2; \dots; \sigma_n)$ в таблице 2 записаны (сверху-вниз) в порядке следования их стандартных номеров.

Формулы $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(X_1;\ X_2; \dots; X_t)$ и $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(X_1;\ X_2; \dots; X_t)$ из L_n называются равносильными, если их таблицы истинности совпадают. Запись $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B}$ будет означать, что формулы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ равносильны. Очевидно, что $\equiv$, как бинарное отношение, является на множестве L_n отношением эквивалентности.

Т.к. таблицы истинности неравносильных формул $\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B} \in L_n$, в соответствии с принятым предположением о порядке следования двоичных наборов, могут отличаться лишь последними столбцами, т.е. столбцами возможных истинностных значений, длины (в данном контексте - высоты) которых равны 2^n , то число различных таблиц истинности для формул из L_n равно 2^{2^n}. Отсюда получаем, что число классов эквивалентности фактор-множества $L_n/\equiv$ равно 2^{2^n}.

Нетрудно проверить, что эквивалентность «≡» является стабильной относительно основных операций алгебры $\boldsymbol{L_n}$, что позволяет каноническим путем перейти от алгебры $\boldsymbol{L_n}$ к фактор-алгебре $\boldsymbol{L_n}/\equiv$. С целью упрощения обозначений, основные операции этой фактор-алгебры будут обозначаться так же, как и основные операции алгебры $\boldsymbol{L_n}$.

Учитывая, что операции «→» и «↔», в силу равносильностей $(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \equiv (\neg\, \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})$ и $(\boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{B}) \equiv ((\neg\, \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \& (\, \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{B}))$, имеющих место для любых формул $\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B} \in L_n$, являются производными от операций &; ∨; ¬, фактор-алгебру $\boldsymbol{L_n}/\equiv$ будем рассматривать, далее, как алгебру сигнатуры $\sigma = \langle F_1^2;\ F_2^2;\ F_3^1;\ c_1;\ c_2 \rangle$, полагая при этом, что функциональные символы $F_1^2; F_2^2$ и F_3^1 интерпретируются на $L_n/\equiv$ как логические операции &; ∨ и ¬ , соответственно, а константные символы c_1 и c_2 - как элементы $[0]_\equiv$ и $[1]_\equiv$.

Согласно определению фактор-алгебры $\boldsymbol{L_n}/\equiv$, (смотри пункт 2), операции &; ∨; ¬ на фактор-множестве $(L_n/\equiv) = \{[\boldsymbol{A}]_\equiv / \boldsymbol{A} \in L_n/\equiv\ \}$ задаются по правилам:

$[\boldsymbol{A}]_\equiv \& [\boldsymbol{B}]_\equiv = [\boldsymbol{A} \& \boldsymbol{B}]_\equiv;\ [\boldsymbol{A}]_\equiv \vee [\boldsymbol{B}]_\equiv = [\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}]_\equiv;\ \neg\, [\boldsymbol{A}]_\equiv = [\neg\, \boldsymbol{A}]_\equiv$,

т.е. результаты операций &; ∨; ¬ алгебры $\boldsymbol{L_n}/\equiv$ над классами эквивалентности определяются через соответствующие операции алгебры $\boldsymbol{L_n}$ над представителями из этих классов. Тем самым, нахождение результатов операций над классами естественным образом связывается с проблемой выбора из этих классов таких формул, оперирование с которыми (в рамках алгебры $\boldsymbol{L_n}$) представляется наиболее продуктивным.

Нетрудно видеть, что отображение $\Phi: L_n \to B_n$, определенное по правилу:

$(\forall \boldsymbol{A}(X_1;\ X_2; \dots; X_n) \in L_n)(\Phi(\boldsymbol{A}(X_1;\ X_2; \dots; X_n) = f_{\boldsymbol{A}}(x_1;\ x_2; \dots; x_n)$,

где $f_{\boldsymbol{A}}(x_1;\ x_2; \dots; x_n)$ - булева функция, табличным заданием которой является таблица истинности формулы $\boldsymbol{A}(X_1;\ X_2; \dots; X_n)$, является гомоморфизмом алгебры $\boldsymbol{L_n}$ на алгебру B_n, для которого бинарное отношение P_Φ совпадает с отношением равносильности ≡ на множестве L_n. Отсюда, в соответствии с первой теоремой о гомоморфизмах алгебраических систем (смотри пункт 2), получаем, что $\boldsymbol{L_n}/\equiv\ \cong\ \mathrm{B}_n$.

Таким образом, как это было отмечено во введении, алгебра высказываний, с точностью до гомоморфного отображения Φ, является булевой алгеброй.

Далее, наряду с записью $\neg \boldsymbol{A}$, будет использоваться запись $\overline{\boldsymbol{A}}$ $(\boldsymbol{A} \in L)$.

6. Булева алгебра совершенных дизъюнктивных (конъюнктивных) нормальных форм.

Во многих отношениях, наиболее удобными для работы представителями из классов эквивалентности являются такие формулы, синтаксическое строение которых дает исчерпывающую информацию об их истинностном содержании. Наиболее «информативными» в этом смысле являются совершенные дизъюнктивные и совершенные конъюнктивные нормальные формы (С.Д.Н.Ф. и С.К.Н.Ф.), т.е. формулы вида

$$\boldsymbol{A}(X_1;\ \dots;X_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1;\,\sigma_2;\dots;\sigma_n)\\ A(\sigma_1;\,\sigma_2;\dots;\sigma_n)=1}} (X_1^{\sigma_1}\,\&\dots\&X_n^{\sigma_n}),\ \ X_i^{\sigma_i} = \begin{cases}\bar{X}_i, \text{если } \sigma_i = 0\\ X_i, \text{если } \sigma_i = 1\end{cases},\ \ i = 1;2;\dots;n\,,$$

$$\left(\boldsymbol{A}(X_1;\ \dots;X_n) = \&_{\substack{(\sigma_1;\,\sigma_2;\dots;\sigma_n)\\ A(\sigma_1;\,\sigma_2;\dots;\sigma_n)=0}} \left({}^{\sigma_1}X_1 \vee \dots \vee^{\sigma_n}X_n\right),\ {}^{\sigma_i}X_i\ = \begin{cases}X_i, \text{если } \sigma_i = 0\\ \bar{X}_i, \text{если } \sigma_i = 1,\end{cases}\ i = 1;2;\dots;n\right).$$

По любой не тождественно ложной формуле $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(X_1;\ X_2;\dots;X_n)$ можно построить равносильную ей С.Д.Н.Ф., используя следующие предписания:

1) построить таблицу истинности для формулы $\boldsymbol{A}$;

2) выделить наборы $(\sigma_1;\ \sigma_2;\dots;\sigma_n)$ значений для переменных $X_1;\ X_2;\dots;X_n$, соответственно, на которых формула $\boldsymbol{A}(X_1;\ X_2;\dots;X_n)$ принимает значение 1;

3) по каждому из выделенных наборов построить логическое произведение $(X_1^{\sigma_1}\&X_i^{\sigma_i}\&\dots\&X_n^{\sigma_n})$, где $X_i^{\sigma_i} = \begin{cases}\bar{X}_i, \text{если } \sigma_i = 0;\\ X_i, \text{если } \sigma_i = 1,\end{cases}\ i = 1;2;\dots;n$;

4) взять логическую сумму всех логических произведений, полученных в предписании 3).

Двойственным образом определяются предписания, следуя которым каждую не тождественно ложную формулу $\boldsymbol{A}$ можно привести к С.К.Н.Ф.)

В общем случае С.Д.Н.Ф. (С.К.Н.Ф.) определяются однозначно с точностью до следования логических слагаемых (сомножителей) и с точностью до следования в них логических сомножителей (слагаемых). Если же логические сомножители $X_i^{\sigma_i}$ (слагаемые ${}^{\sigma_i}X_i$) записывать в порядке следования номеров соответствующих переменных X_i $(i = 1;2;\dots;n)$, а слагаемые $(X_1^{\sigma_1}\&X_i^{\sigma_i}\&\dots\&X_n^{\sigma_n})$ в С.Д.Н.Ф. (сомножители $({}^{\sigma_1}X_1\vee^{\sigma_2}X_2\vee\dots\vee^{\sigma_n}X_n)$ в С.К.Н.Ф. - в порядке следования стандартных номеров соответствующих двоичных наборов $(\sigma_1;\ \sigma_2;\dots;\sigma_n)$, то получаемая С.Д.Н.Ф. (С.К.Н.Ф.) будет определяться единственным образом.

В дальнейшем будем предполагать, что любая С.Д.Н.Ф. (С.К.Н.Ф.) представлена вышеописанным способом.

Исходя из этого предложения, фактор-алгебру $\boldsymbol{L}_n/\equiv$ с точностью до изоморфизма можно представить посредством алгебры совершенных дизъюнктивных (совершенных конъюнктивных) нормальных форм. Ниже приводится определение алгебры совершенных дизъюнктивных нормальных форм (алгебры С.Д.Н.Ф.) [4].

С каждым двоичным набором $\tilde{\sigma}^{(n)} = (\sigma_1;\ \sigma_2;\dots;\sigma_n) \in E^n$ свяжем формулу

$\mathrm{A}_{\tilde{\sigma}^{(n)}}(X_1;\ X_2;\dots;X_n) = \left(X_1^{\sigma_1}\&\,X_2^{\sigma_2}\&\dots\&\,X_n^{\sigma_n}\right),\ X_i^{\sigma_i} = \begin{cases}\bar{X}_i, \text{если } \sigma_i = 0;\\ X_i, \text{если } \sigma_i = 1,\end{cases}\ i = 1;2;\dots;n\,,$

которая в дальнейшем будет записываться в виде $X_1^{\sigma_1}\,X_2^{\sigma_2}\,\dots\,X_n^{\sigma_n}$.

Для каждого подмножества π множества E^n определим формулу

$\mathrm{A}_\pi = \mathrm{A}_\pi(X_1;\ X_2;\dots;X_n) = \bigvee_{\tilde{\sigma}^{(n)}\in\pi}\mathrm{A}_{\tilde{\sigma}^{(n)}}(X_1;\ X_2;\dots;X_n)$

Таким образом, если $\pi \neq \emptyset$, то формула A_π - С.Д.Н.Ф. от переменных $X_1;\ X_2;\dots;X_n$. Если же $\pi = \emptyset$, то будем полагать, что $\mathrm{A}_\pi = \mathrm{A}_\emptyset$ есть логическая константа 0.

Формулу A_{E^n}, как тождественно истинную С.Д.Н.Ф., будем обозначать, далее, через 1.

Положим $\mathrm{A}_{E^n} = \{\mathrm{A}_\pi / \pi \subseteq E^n\}$. На множестве A_{E^n} определим операции &; ∨; ¬ по следующим правилам.

Пусть $\mathrm{A}_{\pi_1}(X_1;\ X_2; \dots; X_n),\ \mathrm{A}_{\pi_2}(X_1;\ X_2; \dots; X_n) \in \mathrm{A}_{E^n}$. Положим

1) $\mathrm{A}_{\pi_1}(X_1;\ X_2; \dots; X_n) \& \mathrm{A}_{\pi_2}(X_1;\ X_2; \dots; X_n) = \mathrm{A}_{\pi_1 \cap \pi_2}(X_1;\ X_2; \dots; X_n)$;

2) $\mathrm{A}_{\pi_1}(X_1;\ X_2; \dots; X_n) \vee \boldsymbol{A}_{\pi_2}(X_1;\ X_2; \dots; X_n) = \mathrm{A}_{\pi_1 \cup \pi_2}(X_1;\ X_2; \dots; X_n)$;

3) $\neg \mathrm{A}_\pi(X_1;\ X_2; \dots; X_n) = \mathrm{A}_{E^n \setminus \pi}(X_1;\ X_2; \dots; X_n)$.

С учетом соглашений о форме представления С.Д.Н.Ф., получаем, что операции &; ∨ и ¬ являются алгебраическими на множестве A_{E^n}. Исходя из этого, получаем, что система:

$$\mathrm{A}_{E^n} = \langle \mathrm{A}_{E^n};\ \&; \vee;\ \neg\ ; 0; 1 \rangle$$

является алгеброй сигнатуры $\sigma = \langle F_1^2; F_2^2; F_3^1; c_1; c_2 \rangle$, если считать. что функциональные и константные символы $F_1^2; F_2^2; F_3^1$ и $c_1; c_2$ этой сигнатуры проинтерпретированы на множестве A_{E^n}, как вышеопределенные операции &; ∨; ¬ и выделенные элементы 0; 1, соответственно. Эта алгебра и называется алгеброй С.Д.Н.Ф.

Нетрудно проверить, что отображение $\Phi\colon\ \mathrm{A}_{E^n} \to L_n/\equiv$, определенное по правилу

$(\forall \mathrm{A}_\pi \in \mathrm{A}_{E^n})(\Phi(\mathrm{A}_\pi) = [\mathrm{A}_\pi]_\equiv)$ является изоморфным отображением алгебры A_{E^n} на алгебру $\boldsymbol{L}_n/\equiv$.

7. Вероятностные пространства. Под вероятностным пространством [6] в теории вероятностей понимается упорядоченная тройка $\langle \Omega;\ B;\ P \rangle$, где Ω - пространство элементарных исходов; B - σ- алгебра событий; P- вероятностная мера на B. При этом:

- под σ - алгеброй B понимается семейство подмножеств множества Ω, обладающее следующими свойствами:

1) для любого подмножества $A \in B$ его дополнение $\bar{A} = \Omega \setminus A$, также принадлежит B;

2) если $\{A_n / n \in N\}$ - счетная совокупность подмножеств из B, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in B$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in B$.

Другими словами σ-алгебра B есть семейство подмножеств множества Ω, замкнутая относительно взятия дополнений и счетных объединений и пересечений (подмножеств из B);

- вероятностной мерой P на -алгебре B называется функция, посредством которой каждому подмножеству $A \in$ В ставится в соответствие некоторое число $P(A)$ такое, что:

1) $P(A) \geq 0$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) если $\{A_n / n \in N\}$ - счетная совокупность попарно непересекающихся подмножеств из B, то $P(\sum_{i=1}^{\infty}(A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$;

- событиями вероятностного пространства считаются подмножества множества Ω, принадлежащие B.

Таким образом, событиями считаются не все подмножества множества Ω, а лишь только те, которые принадлежат некоторой - алгебре. Необходимость этого ограничения (в случае, если Ω более чем счетно): «… заключается в существовании так называемых неизмеримых множеств, что в свою очередь кроется в топологической структуре классических пространств (прямой, плоскости, трехмерного пространства и т.д.)» ([7], стр. 23).

В случае, когда пространство элементарных событий Ω конечно, множество $B(\Omega)$ всех подмножеств множества Ω будет, как нетрудно видеть, -алгеброй.

В соответствии с этим, далее будут рассматриваться вероятностные пространства вида $\langle\Omega_S;B(\Omega_S);P\rangle$ где Ω_S - пространство элементарных исходов опыта S, охватываемого классической схемой теории вероятностей, а вероятностная мера P определяется по правилу:

$(\forall\omega\in\Omega_S)(P(\omega)={}^1/_n)$,

где $n=|\Omega_S|$ - число исходов опыта S.

Тем не менее, общая схема определения вероятностного пространства, обогащая и возводя на высочайший уровень абстрактного восприятия многие черты, присущие классической схеме теории вероятностей, аккумулирует в себе возможности последовательной ее адаптации до исходного уровня, предопределяя, тем самым, специфику предлагаемых далее описаний алгебры событий в терминах теории множеств и алгебры множеств в терминах теории вероятностей.

8. Алгебра событий. Исходными понятиями теории вероятностей являются понятия стохастического эксперимента и случайного события. Стохастическим называется такой эксперимент, результат которого заранее (т.е. до его проведения) невозможно предугадать. Под случайным событием понимается событие, которое может произойти в результате проведения стохастического эксперимента.

В дальнейшем (для краткости), вместо слов «стохастический эксперимент» будем употреблять слово «опыт» (или «испытание»), а вместо словосочетания «случайное событие» будем говорить - «событие». События будем обозначать большими буквами латинского алфавита (используя, при необходимости, индексы):

$A;B;\ldots;\ A_1;\ A_2;\ldots;A_t;\ldots;B_1;\ B_2;\ldots;B_s;\ldots$.

Для обозначения опыта будем использовать букву S. Через S^* будем обозначать множество всех событий, которые могут произойти в результате опыта S.

Напомним определения ряда понятий теории вероятностей, которые наиболее часто будут встречаться в дальнейшем:

- событие $A\in S^*$называется достоверным, если в результате проведения опыта S оно обязательно произойдет и невозможным, если в результате проведения этого опыта оно заведомо не может произойти;

- события $A_1;\ A_2\in S^*$ называются несовместными в опыте S, если их одновременное появление в результате этого опыта является невозможным;

- события $A_1;\ A_2\in S^*$ называются равновозможными, если есть все основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое;

- события $A_1;\ A_2;\ldots;A_t\in S^*$ образуют полную группу событий, если в результате проведения опыта S обязательно происходит хотя бы одно из них.

Достоверное и невозможное события опыта S будут обозначаться, далее, через $\emptyset$ и Ω, соответственно.

Будем говорить, что опыт S охватывается классической схемой (или осуществляется по классической схеме), если из совокупности S^* можно выделить такую конечную подсовокупность Ω_S событий, которая удовлетворяет следующим условиям:

а) Ω_S - образует полную группу попарно несовместных и попарно равновозможных событий;

б) для любого события $A \in S^*$, по появившемуся (в результате проведения опыта S) событию ω из Ω_S, можно достоверно судить о том, произошло событие A или нет.

Подмножество Ω_S называется пространством элементарных событий.

В дальнейшем будем предполагать, что все опыты S осуществляются по классической схеме.

На множестве S^* определяются (по хорошо известным правилам [6]) теоретико-вероятностные операции: $+$; $\cdot$; и $\overline{}$ - сложения, умножения и взятие противоположного события, соответственно. Меньше внимания в учебной литературе уделяется бинарным отношениям $\rightarrow$ - следования и $\equiv$ - равносильности событий, которые вводятся на S^* следующим образом.

Пусть $A; B \in S^*$.

а) Событие B называется следствием события A (символически $A \rightarrow B$), если появление события A в результате проведения опыта S влечет за собой появление события B;

б) События A и B называются равносильными (символически $A \equiv B$), если событие B является следствием события A и событие A является следствием события B.

Нетрудно видеть, что отношения $\rightarrow$ и $\equiv$ удовлетворяют следующим свойствам:

1) $A \rightarrow A$;

2) Если $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow C$, то $A \rightarrow C$;

3) Если $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$, то $A \equiv B$;

4) $\emptyset \rightarrow A$;

5) $A \rightarrow \Omega$;

6) $A \equiv A$;

7) Если $A \equiv B$ и $B \equiv C$, то $A \equiv C$;

8) Если $A \equiv B$, то $B \equiv A$,

для любых $A; B; C \in S^*$.

Отметим, что свойства 1) - 2) показывают, что отношение $\rightarrow$ - следования является отношением квазипорядка на множестве S^*. При этом, в соответствии со свойствами 4) и 5), события $\emptyset$ и Ω являются минимальным и максимальным элементами квазиупорядоченного множества $\langle S^*; \rightarrow \rangle$. Аналогичным образом, в соответствии со свойствами 6) - 8), отношение $\equiv$ - равносильности является отношением эквивалентности.

Заметим, что отношение $\equiv$ - равносильности событий вводится на множестве S^* следующим образом

$$(\forall A; B \in S^*)\Big((A \equiv B) \Leftrightarrow \big((A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)\big)\Big),$$

т.е., в соответствии с общей схемой перехода от квазиупорядоченного множества $\langle S^*; \rightarrow \rangle$ к фактор-системе $\langle S^*/\equiv; \Rightarrow \rangle$ [4]. При этом, бинарное отношение $\Rightarrow$, определяемое на фактор-множестве $S^*/\equiv$ по правилу

$$(\forall [A]_\equiv; [B]_\equiv \in S^*/\equiv)\big(([A]_\equiv \Rightarrow [B]_\equiv) \Leftrightarrow (A \rightarrow B)\big),$$

является отношением частичного порядка.

Условие б) определения пространства элементарных событий Ω_S позволяет для каждого события $A \in S^*$ выделить подмножество $\Omega_S(A)$ множества Ω_S, включающее в себя те и только те элементарные события, следствием которых является событие A, т.е.

$\Omega_S(A) = \{\omega / (\omega \in \Omega_S) \& (\omega \to A)\}$.

Элементарные события, принадлежащие подмножеству $\Omega_S(A)$, называются событиями, благоприятствующими событию A.

Замкнутость множества S^* относительно теоретико-вероятностных операций позволяет ввести в рассмотрение алгебру

$$\boldsymbol{S}^* = \langle S^*; +; \cdot\,; \;\bar{}\;; \emptyset; \Omega\rangle \qquad (5)$$

которая называется алгеброй событий. Нетрудно видеть, что отношение $\equiv$ - равносильности является (как бинарное отношение эквивалентности на S^*) стабильным относительно основных операций алгебры (5), т.е. является отношением конгруэнтности. Это дает возможность построить фактор-алгебру

$$(\boldsymbol{S}^*/\equiv) = \langle\{[A]_\equiv / A \in S^*\}; \boldsymbol{+}; \bullet\,; \;\bar{}\;; [\emptyset]_\equiv; [\Omega]\rangle \qquad (6)$$

Алгебру (6) можно считать алгеброй событий «в чистом виде» в том смысле, что равносильные, т.е. не равные (в общем случае) события в этой алгебре отождествляются и каждая совокупность всех попарно равносильных событий представляет один элемент.

Пример 1. Пусть опыт S представляет собой бросание двух игральных кубиков, тогда события:

A - состоящее в том, что число очков, выпавших на каждом кубике, больше 5;

B - состоящее в том, что сумма очков, выпавших на кубиках, равна 12;

C - состоящее в том, что на каждом из кубиков выпало максимально возможное число очков;

D - состоящее в том, что числа очков, выпавших на каждом из кубиков, делятся на 6;

E - состоящее в том, что числа очков, выпавших на кубиках, являются действительными корнями уравнения

$$x^4 - 12x^3 + 37x^2 - 12x + 36 = 0\,,$$

будут попарно равносильными, т.к. появление любого из них влечет за собой появление каждого из остальных. В соответствии с этим, события $A; B; C; D; E$ и другие им равносильные события из S^*, при переходе от алгебры (5) к алгебре (6), утрачивая индивидуально присущие им черты, отождествляются и «сливаются» в один элемент, представляющий собой элементарное событие

$$[(6; 6)]_\equiv = [\text{на каждом из кубиков выпало по 6 очков}]_\equiv$$

алгебры (6).

Пример 2. Пусть опыт S состоит в бросании одного игрального кубика. Тогда

$$\Omega_S = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \omega_4; \omega_5; \omega_6\},$$

где ω_i - элементарное событие, состоящее в том, что число очков, выпавших на кубике, равно i, $i = 1; 2; \dots; 6$. Рассмотрим события:

A - состоящее в том, что число очков, выпавших на кубике, является четным;

B - состоящее в том, что число очков, выпавших на кубике, не принадлежит множеству $\{0; 1; 3; 5; 8; 11\}$;

C - состоящее в том, что число очков, выпавших на кубике, является одним из делящихся на 2 натуральных решений неравенства $1 < x < 7$.

Ясно, что события $A; B; C$ - попарно равносильны. Нетрудно видеть, что возможность включения этих событий в один и тот же класс, т.е. возможность «слияния» их в одно событие

$[\text{число очков, выпавших на кубике равно 2 или 4, или 6}]_{\equiv} \in S^*/\equiv$,

обеспечивается тем, что каждое из этих событий является следствием одних и тех же элементарных событий $\omega_2; \omega_4; \omega_6 \in \Omega_S$. Т.е. каждому из событий $A; B; C$ соответствует одно и то же подмножество $\{\omega_2; \omega_4; \omega_6\}$ пространства элементарных событий Ω_S.

Отмеченная в примере 2 возможность сопоставления с каждым событием $A \in S^*$ некоторого подмножества множества Ω_S, является следствием условий а) и б) определения пространства элементарных событий Ω_S. Именно эта возможность позволяет дать описание фактор-алгебры $\boldsymbol{S}^*/\equiv$ (а, следовательно, и алгебры $\boldsymbol{S}^*$) «в терминах» алгебры множеств.

Обозначим через $B(\Omega_S)$ множество всех подмножеств множества Ω_S. Множество $B(\Omega_S)$ замкнуто относительно бинарных теоретико-множественных операций $\cup$ - объединения, $\cap$ - пересечения и $\setminus$ - разности множеств. Полагая $\bar{X} = \Omega_S \setminus X$, для любого $X \in B(\Omega_S)$, получаем, что $X \setminus Y = X \cap \bar{Y}$ для любого $Y \in \Omega_S$.

Множество $B(\Omega_S)$ относительно операций $\cup; \cap;$ и $\overline{}$ представляет собой булеву алгебру

$\boldsymbol{B}(\Omega_S) = \langle B(\Omega_S); \cup; \cap; \overline{};\ \emptyset;\ \Omega_S \rangle$,

при этом подмножества $\emptyset$ и Ω_S являются, соответственно, нулем и единицей этой алгебры.

Реализуя отмеченную выше возможность описания алгебры (6) на языке алгебры множеств, напомним, что, ранее каждому событию $A \in S^*$ был поставлен в соответствие элемент $\Omega_S(A)$ булеана $B(\Omega_S)$:

$\Omega_S(A) = \{\omega/(\omega \in \Omega_S)\&(\omega \to A)\}$,

Таким образом, получаем следующую характеризацию события $A \in S^*$:

$(\Omega_S(A) = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_t\}) \Leftrightarrow (A = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_t)$. (7)

Определим теперь отображение $\varphi: S^* \to B(\Omega_S)$ по следующему правилу:

$(\forall A \in S^*)(\varphi(A) = \Omega_S(A))$.

Основываясь на характеризации (7), нетрудно проверить, что отображение φ является сюбъективным и удовлетворяет условиям:

1) $\varphi(A + B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$;

2) $\varphi(A \cdot B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$;

3) $\varphi(\bar{A}) = \Omega_S \setminus \Omega_S(A)$;

4) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$;

5) 3) $\varphi(\Omega) = \Omega_S$.

Вышеприведенные равенства 1) - 5) достаточно очевидны. Тем не менее, учитывая роль этих равенств в обосновании возможностей применения диаграмм Эйлера-Венна для теоретико-множественной интерпретации операций над событиями, докажем (для примера) одно из них.

Пример 3. Равенство 1), т.е. равенство $\Omega_S(A+B) = \Omega_S(A) \cup \Omega_S(B)$, докажем методом включений. Пусть

$(\omega \in \Omega_S(A+B)) \Rightarrow \big(\omega \to (A+B)\big) \Rightarrow ((\omega \to A) \vee (\omega \to B)) \Rightarrow$

$\Rightarrow ((\omega \in \Omega_S(A)) \vee (\omega \in \Omega_S(B))) \Rightarrow (\omega \in \Omega_S(A) \vee \Omega_S(B))$.

Тем самым, включение $\Omega_S(A+B) \subseteq \Omega_S(A) \cup \Omega_S(B)$ доказано. Обратное включение доказывается аналогичным образом.

Т.к. отображение φ, являясь отображением носителя S^* алгебры $\boldsymbol{S}^*$ на носитель $B(\Omega_S)$ алгебры $\mathrm{B}(\Omega_S)$, «сохраняет», согласно равенствам 1) - 5), их основные операции, то это отображение является гомоморфным отображением первой из этих алгебр на вторую.

Отсюда, на основании 1-ой теоремы о гомоморфизмах алгебр (смотри пункт 2), получаем, что фактор-алгебра $\boldsymbol{S}^*/\equiv$ изоморфна алгебре $\mathrm{B}(\Omega_S)$:

$(\boldsymbol{S}^*/\equiv) \cong \mathrm{B}(\Omega_S)$.

Таким образом, алгебра $\boldsymbol{S}^*$ событий опыта *S*, охватываемого классической схемой, «в чистом виде» является булевой алгеброй подмножеств множества Ω_S - элементарных исходов этого опыта. Это описание послужит базовой основой для получения других (взаимных) характеризаций.

Литература.

1. Boole G. The mathematical analysis of logic, being an essay towargs a calculus of deductive reasoning. Cambridge - London, Macmillan, 1847.
2. Boole G. An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probability. London. - Cambridge, 1954.
3. Математика XIX века. Под редакцией А.Н.Колмагорова и А.П.Юшкевича. М.: Наука, 1969.
4. С. С Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин. Основания дидактики обучения логико-алгебраическим дисциплинам в высшей школе. Часть I . Научно-теоретические и идейно-методологические предпосылки. Новосибирск: изд-во Учреждения Российской академии образования «Институт педагогических исследований одаренности детей», 2011.
5. С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин. Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении. Новосибирск.: НГУ, 2007.
6. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2.- М.: Мир, 1967.
7. П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. Теория вероятностей. Математическая статистика. М.: Гардарика, 1998.

Отношения по направлению и квантoрные операции над предикатами (I)

УДК 372.851:510

Гончаров Сергей Савостьянович
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук
Россия, г. Новосибирск, проспект академика Коптюга, 4, телефон: (383) 333-28-92

Никитин Александр Александрович
Федеральное государственное научное учреждение
«Институт педагогических исследований одаренности детей»
Российской академии образования
Россия, г. Новосибирск, ул. Приморская, 22, телефон (383) 345-80-21

Дроботун Борис Николаевич
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова
Казахстан, г. Павлодар, ул. Ломова, 64, телефон: (7182) 67-36-76

В данной статье, представляющей первую часть работы, посвященной выявлению содержания и методологии обучения элементам логики предикатов средствами школьных математических дисциплин: вводятся отношения по направлению; для класса таких отношений определяются аналоги операций проектирования и цилиндрификации и на основе связей этих операций с теоретико-множественными, логическими и кванторными операциями предлагаются технологии описания областей истинности сложных предикатов, задаваемых эффективно проверяемыми условиями.

Ключевые слова: отношение, операция проектирования, операция цилиндрификации, цилиндр, предикат, область истинности.

1. Операции проектирования и цилиндрификации вводятся в теории рекурсивных функций с целью получения различных классификаций совокупностей подмножеств множества натуральных чисел а также совокупностей отношений, определенных на множестве натуральных чисел. Такие множества и отношения будут называться, далее, числовыми. К примеру, арифметическая иерархия числовых множеств (отношений) определяется, как некоторая их классификация по уровню алгоритмической сложности проблемы вхождения.

В частности, числовое отношение P входит в арифметическую иерархию, если P - рекурсивно или может быть получено из некоторого рекурсивного отношения S путем последовательного применения конечного числа операций проектирования и взятия дополнения[1].

Операции проектирования и цилиндрификации вводятся следующим образом.

Пусть $P = P(x_1; x_2; \dots; x_n)$ - n-местное числовое отношение ($n \geq 1$). Тогда:

а) проекцией отношения P вдоль i-ой координаты ($1 \leq i \leq n$) называется ($n-1$)-местное отношение

$^{(i)}P = \{(x_1; x_2; \dots; x_{i-1}; x_{i+1}; \dots; x_n)/(\exists x_i \in N)\ ((x_1; x_2; \dots; x_{i-1}; x_i; x_{i+1}; x_n) \in P)\}$,

т.е. операция проектирования вдоль i-ой координаты определяется как операция, результатом применения которой к n-местному числовому отношению P является $(n-1)$-местное числовое отношение $^{(i)}P$, кортежи которого получаются из кортежей отношения P посредством удаления i-ой координаты;

б) цилиндрификацией отношения P вдоль i-ой координаты $(1 \le i \le n)$ называется $(n+1)$-местное отношение

$P^{(i)} = \{(x_1; x_2; \dots; x_{i-1}; x; x_i; \dots; x_n)/((x_1; x_2; \dots; x_{i-1}; x_i; x_{i+1}; x_n) \in P)\&(x \in N)\}$,

т.е. операция цилиндрификации вдоль i-ой координаты определяется как операция, результатом применения которой к n-местному числовому отношению P является $(n+1)$-местное числовое отношение $P^{(i)}$, кортежи которого получаются из кортежей отношения P добавлением новой координаты x, которая ставится на i-ое место (между x_{i-1} и x_i, как координатами кортежей из P), причем в качестве этой новой координаты берется любой элемент множества M.

С использованием логической символики и терминологии, а также известных равносильностей логики предикатов, позволяющих выражать любую из кванторных операций через двойственную и операцию отрицания, n-местное числовое отношение, входящее в арифметическую иерархию, может быть представлено (для некоторого $m \ge 0$), при подходящем переименовании переменных, в виде

$P = \{(a_1; a_2; \dots; a_n)\ /((a_1; a_2; \dots; a_n) \in N^n)\&(Q_1 y_1)(Q_2 y_2) \dots (Q_m y_m) S(a_1; a_2; \dots$

$\dots; a_n; y_1; y_2; \dots; y_m)\}$,

где $Q_i \in \{\forall; \exists\}$; $i = 1; 2; \dots; m$ и $S = S(x_1; x_2; \dots; x_n;\ y_1; y_2; \dots; y_m)$ - $(n+m)$ - местное рекурсивное отношение.

В частности, если $S = S(z_1; z_2; z_3;\ z_4; z_5; z_6)$ - рекурсивное шестиместное отношение, то

$P = \{(a_2; a_4)\ /\neg(\exists z_5)\neg(\exists z_6)\neg(\exists z_3)(\exists z_1) S(z_1; a_2; z_3; a_4; z_5; z_6)\}$ -

двухместное отношение, полученное из S в результате применения операций взятия дополнения и проектирования в следующем порядке: проектирование вдоль 1-ой координаты; проектирование вдоль 3-ой координаты; взятие дополнения; проектирование вдоль 6-ой координаты; взятие дополнения; проектирование вдоль 5-ой координаты; взятие дополнения. Т.к.

$\neg(\exists z_5)\neg(\exists z_6)\neg(\exists z_3)(\exists z_1) S(z_1; z_2; z_3; z_4; z_5; z_6) \equiv$

$\equiv (\forall z_5)(\exists z_6)(\forall z_3)(\forall z_1)\neg S(z_1; z_2; z_3; z_4; z_5; z_6)$,

то

$P = \{(a_2; a_4)\ \ /((a_2; a_4) \in N^2)\&\ (\forall z_5)(\exists z_6)(\forall z_3)(\forall z_1)\neg S(z_1; a_2; z_3; a_4; z_5; z_6)\}$.

Переименовывая переменные в соответствии с подстановкой

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ y_4 & x_1 & y_3 & x_2 & y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

и полагая $S'(x_1; x_2; y_1; y_2; y_3; y_4) = \neg S(y_4; x_1; y_3; x_2; y_1; y_2)$, т.е. $m = 4$, будем иметь:

$P' = \{(a_1; a_2)\ /((a_1; a_2) \in N^2) \& (\forall y_1)(\exists y_2)(\forall y_3)(\forall y_4) S'(a_1; a_2; y_1; y_2; y_3; y_4)\}$,

при этом, отношение $S'(x_1; x_2; y_1; y_2; y_3; y_4)$, как отрицание рекурсивного отношения S, является рекурсивным. Полученное представление отношения P в полной мере соответствует общей форме представления отношений, входящих в арифметическую иерархию.

Заметим также, что если $P = P(x_1; x_2; \dots; x_n)$ - n-местный числовой предикат, $i \in \{1; 2; \dots; n\}$ и $P^{(i)} = T\ (x_1; x_2; \dots; x_{i-1}; x; x_i; \dots; x_n)$ - его цилиндрификация вдоль i-ой координаты, то $(\forall x) T\ (x_1; x_2; \dots; x_{i-1}; x; x_i; \dots; x_n) \equiv P(x_1; x_2; \dots; x_n)$, т.е. операции цилиндрификации вдоль i-ой координаты и операция связывания i-ой переменной кватором $\forall$-всеобщности являются, в определенном смысле, взаимно обратными.

С учетом приведенного замечания и возможности приведения формул исчисления предикатов к предваренной нормальной форме, числовые отношения, входящие в арифметическую иерархию, могут быть получены как области истинности сложных (формульных) предикатов, определенных индуктивным путем на множестве натуральных чисел, при условии, что в качестве элементарных формул, т.е. формул, определяемых на шаге 0 (базис индукции), берутся рекурсивные числовые предикаты. При этом, область допустимых к применению операционных средств можно ограничить операциями проектирования, взятия дополнения и цилиндрификации.

Исходя из вышеизложенного, возникает мысль о возможности обращения этого процесса и распространения обратных процедур на совокупности предикатов произвольной природы. Т.е. о возможности применения операций проектирования и цилиндрификации для описания областей истинности сложных предикатов, полученных из простых предикатов, определенных на произвольном множестве. Кроме того, если простые предикаты задаются посредством эффективно проверяемых условий на конечных множествах или на множестве действительных чисел, то адаптировать эти описания и технологии их получения до уровня, обеспечивающего условия существенного расширения возможностей пропедевтического изучения логических и кванторных операций средствами школьных математических дисциплин.

Предлагаемая статья представляет собой первую часть работы, посвященной выявлению научно-теоретических оснований, определяющих возможность и продуктивность, а также содержание и методологию изучения элементов логики высказываний и логики предикатов средствами школьных математических дисциплин и обеспечивающих возможности обогащения арсенала этих средств за счет рассмотрения технологий и конструкций нетрадиционного характера, свойственных современному этапу развития математики.

С целью обеспечения единообразия в процедуре поименования переменных и постоянства в соотнесении их нумерации с нумерацией координат отношений, в данной статье вводится понятие отношения по направлению и определяются соответствующие этим целям аналоги операций проектирования и цилиндрификации. В процессе изучения свойств введенных операций и их связей с теоретико-множественными, логическими и кванторными операциями вскрываются возможности применения этих операций для описания областей истинности сложных предикатов, исходя из областей истинности простых (исходных) предикатов [2].

На основе полученных описаний выявляются технологии разработки задач и упражнений инновационной направленности, ориентированных на формирование у учащихся средних образовательных учреждений пропедевтических представлений о выразительных возможностях формальных языков предикатных сигнатур.

2. Пусть M - произвольное непустое множество и $M_1; M_2; \dots; M_t; \dots$ - занумерованные натуральными числами идентичные копии множества M (т.е. $M_t = M$ для любого $t \in N$). Множество M_i будем называть i-ой координатной осью ($i \in N$), а декартово произведение

$$\bigtimes_{i\in N} M_i = \cdots\left(\left(\left(\dots\left((M_1 \times M_2) \times M_3\right) \times \dots\right) \times M_t\right) \times M_{t+1}\right) \times \dots \qquad (1)$$

бесконечномерным декартовым M-пространством.

Упорядоченная последовательность $(i_1; i_2; \dots; i_n)$, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ длины n $\left(i_j \in N\right)$, $j = 1; 2; \dots; n$ будет называться направлением, а число n - размерностью этого направления. Множество всех направлений размерности n будем обозначать через Σ_n.

Пусть $(i_1; i_2; \dots; i_n)$ - направление размерности n . Декартово произведение

$$\bigtimes_{k=1}^{n} M_{i_k} = \left(\left(\dots\left(\left(M_{i_1} \times M_{i_2}\right) \times M_{i_3}\right) \times \dots\right) \times M_{i_n}\right) \qquad (2)$$

будем называть n-мерным декартовым M-пространством направления $(i_1; i_2; \dots; i_n)$, а декартовы сомножители M_{i_j} - i_j-ми координатными осями этого пространства.

Заметим, что n-мерное декартово M - пространство направления $(i_1; i_2; \dots; i_n)$ может рассматриваться как проекция пространства (1) по этому направлению.

Подмножества декартова произведения (2) будут называться n-местными отношениями направления $(i_1; i_2; \dots; i_n)$, заданными на множестве M. Далее, через $\boldsymbol{A}_{(i_1;i_2;\dots;i_n)}(M)$ будем обозначать множество всех n-местных отношений направления $(i_1; i_2; \dots; i_n)$, заданных на этом множестве. Положим

$$\boldsymbol{A}(M) = \bigcup_{n\in N}\left(\bigcup_{(i_1;i_2;\dots;i_n)\in\Sigma_n} \boldsymbol{A}_{(i_1;i_2;\dots;i_n)}(M)\right), \qquad (3)$$

т.е. $\boldsymbol{A}(M)$ - множество всех отношений всевозможных направлений любых конечных размерностей.

Определение 1. Пусть $A \in \boldsymbol{A}_{(i_1;i_2;\dots;i_n)}$ и $t \in N$. Положим:

а)

$$^{(t)}A = \begin{cases} A, \ \text{если } t \notin \{i_1; i_2; \dots; i_n\}; \\ \left\{\left(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}\right) \Big/ \left(\exists a \in M_{i_k}\right)\left(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}\right) \in A\right\}, \\ \quad \text{если } t \in \{i_1; i_2; \dots; i_n\}; \end{cases}$$

б)

$$
A^{(t)}=\begin{cases}
A, \text{ если } t\in\{i_1;i_2;\dots;i_n\};\\
\left\{ {(a;a_{i_1};a_{i_2};\dots;a_{i_n})}\Big/{(a_{i_1};a_{i_2};\dots;a_{i_n})\in A; a\in M_t} \right\}, \text{ если } t<i_1;\\
\left\{ {(a_{i_1};a_{i_2};\dots;a_{i_{k-1}};a;a_{i_k};\dots;a_{i_n})}\Big/{(a_{i_1};a_{i_2};\dots;a_{i_n})\in A; a\in M_t} \right\},\\
\qquad \text{если } i_{k-1}<\ t<i_k \text{ для некоторого } k\in\{2;3;\dots;n\};\\
\left\{ {(a_{i_1};a_{i_2};\dots;a_{i_n};a)}\Big/{(a_{i_1};a_{i_2};\dots;a_{i_n})\in A; a\in M_t} \right\}, \text{ если } t>i_n.
\end{cases}
$$

Говоря неформально, кортежи отношения ${}^{(t)}A$, получаются из кортежей исходного отношения *A* удалением *t*-ой координаты, если *t* равно номеру одной из координатных осей этого отношения. В противном случае, отношение ${}^{(t)}A$ совпадает с *A*. Аналогичным образом, кортежи отношения $A^{(t)}$ получаются из кортежей исходного отношения *A* добавлением к ним *t*-ой координаты, если *t* не равно номеру ни одной из координатных осей этого отношения, причем в качестве *t*-ой координаты берется любой элемент множества M_t. В противном случае, отношение $A^{(t)}$ совпадает с *A*.

На множестве $\boldsymbol{A}(M)$ (смотри равенство (3)) введем операции $\pi_{(t)}$ и $\pi^{(t)}(t\in N)$ - проектирования и цилиндрификации (вдоль координатных осей) в соответствии со следующим определением.

Определение 2. Пусть $A\in\boldsymbol{A}(M)$ и $t\in N$. Положим:

а) $\pi_{(t)}(A)={}^{(t)}A$;

б) $\pi^{(t)}(A)=A^{(t)}$.

Согласно определениям 1 и 2, операции $\pi_{(t)}$ и $\pi^{(t)}$ являются (на множестве $\boldsymbol{A}(M)$) алгебраическими операциями.

Будем говорить, что отношения ${}^{(t)}A$ и $A^{(t)}$ получаются из отношения *A* посредством применения к нему операций проектирования и цилиндрификации (вдоль *t*-ой координаты) и называть их, соответственно, *t*-проекцией и *t*-цилиндрификацией этого отношения.

Отметим простейшие свойства *t*-проекций и *t*-цилиндрификаций.

Предложение 1. Пусть $A_1;A_2\in\boldsymbol{A}_{(i_1;i_2;\dots;i_n)}(M)$. Если $A_1\subseteq A_2$, то для любого $(t\in N)$ имеют место включения:

а) ${}^{(t)}A_1\subseteq{}^{(t)}A_2$;

б) $A_1^{(t)}\subseteq A_2^{(t)}$.

Доказательство этого предложения непосредственно следует из определений 1 и 2.

Предложение 2. Пусть $A\in\boldsymbol{A}(M)$ и $t\in N$. Тогда:

а) ${}^{(t)}({}^{(t)}A)={}^{(t)}A$;

б) $(A^{(t)})^{(t)}=A^{(t)}$;

в) если $t \notin \{i_1; i_2; \dots; i_n\}$, то $A = {}^{(t)}(A^{(t)})$;

г) если $t \in \{i_1; i_2; \dots; i_n\}$, то $A \subseteq ({}^{(t)}A)^{(t)}$.

Доказательство. Докажем, для примера, утверждения а), в) и г) этого предложения.

Пусть A является отношением направления $\{i_1; i_2; \dots; i_n\}$.

а) Если $t \notin \{i_1; i_2; \dots; i_n\}$, то ${}^{(t)}A = A$, согласно определению 1.а). Следовательно, $\pi_{(t)}({}^{(t)}A) = \pi_{(t)}(A)$, т.е. ${}^{(t)}({}^{(t)}A) = {}^{(t)}A$.

Если $t \in \{i_1; i_2; \dots; i_n\}$ и $t = i_k$ для некоторого $k \in \{1; 2; \dots; n\}$, то ${}^{(t)}A$ является отношением направления $(i_1; i_2; \dots; i_{k-1}; i_{k+1}; \dots; i_n)$. Т.к. $t \notin \{i_1; i_2; \dots; i_{k-1}; i_{k+1}; \dots; i_n\}$, то вновь, в соответствии с определением 1.а) получаем, что ${}^{(t)}({}^{(t)}A) = {}^{(t)}A$.

в) Пусть $t \notin \{i_1; i_2; \dots; i_n\}$. Равенство $A = {}^{(t)}(A^{(t)})$ докажем методом включений.

Пусть $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}) \in A$. Тогда, для любого $a \in M_t$ будем иметь:

в.1) $(a; a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}) \in A^{(t)}$, если $1 \le t < i_1$;

в.2) $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in A^{(t)}$, если $i_{k-1} < t < i_k$;

в.3) $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}; a) \in A^{(t)}$, если $t > i_n$.

Т.к. отношение $A^{(t)}$ является отношением направления:

$(t; i_1; i_2; \dots; i_n)$, в случае в.1);

$(i_1; i_2; \dots; i_{k-1}; t; i_{k+1}; \dots; i_n)$, в случае в.2);

$(i_1; i_2; \dots; i_n; t)$, в случае в.3),

т.е. t, в каждом из этих случаев, принадлежит множеству координат этого направления, то кортежи отношения ${}^{(t)}(A^{(t)})$ получаются из кортежей отношения $A^{(t)}$ удалением t-ой координаты. Но как показывают принадлежности в.1) - в.3), удаление t-ой координаты приводит к кортежу $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n})$. Следовательно, этот кортеж принадлежит ${}^{(t)}(A^{(t)})$.

Обратное включение доказывается аналогично.

г) Пусть $t \in \{i_1; i_2; \dots; i_n\}$ и $t = i_k$ для некоторого $k \in \{1; 2; \dots; n\}$. Покажем, что включение $A \subseteq ({}^{(t)}A)^{(t)}$ действительно имеет место.

Пусть $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}) \in A$, тогда $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in {}^{(i_k)}A$. Т.к. ${}^{(t)}A$ является отношением направления $(i_1; i_2; \dots; i_{k-1}; i_{k+1}; \dots; i_n)$, и $i_{k-1} < t < i_{k+1}$, т.е. $t \notin \{i_1; i_2; \dots; i_{k-1}; i_{k+1}; \dots; i_n\}$, то согласно определению 1.б), получаем, что $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in ({}^{(t)}A)^{(t)}$для любого $a \in M_{i_k}$. Полагая $a = a_{i_k}$, будем иметь $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}) \in ({}^{(t)}A)^{(t)}$, что завершает доказательство.

3. Продолжая изучение свойств операций t-проектирования и t-цилиндрификации и связей этих операций с теоретико-множественными операциями, покажем предварительно, что операцию $\pi^{(t)}$ - t-цилиндрификации можно выразить через операцию $\times$ - декартова произведения множеств.

Пусть $A \in \boldsymbol{A}_{(i_1; i_2; \dots; i_n)}(M)$, $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}) \in A$ и $t \in N$. Положим:

$$\left(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}\right) \times_t M_t = \begin{cases} \{\left(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}\right)\}, \text{ если } t \in \{i_1; i_2; \dots; i_n\}; \\ \left\{ \left(a_t; a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}\right) \Big/ a_t \in M_t \right\}, \text{если } 1 \le t < i_1; \\ \left\{ \left(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_t; a_{i_k}; \dots; a_{i_n}\right) \Big/ a_t \in M_t \right\}, \\ \quad \text{если } i_{k-1} < t < i_k \text{ для некоторого } k \in \{2; 3; \dots; n\}; \\ \left\{ \left(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}; a_t\right) \Big/ a_t \in M_t \right\}, \text{если } t > i_n. \end{cases} \quad (4)$$

Нетрудно проверить, что

$$A^{(t)} = \bigcup_{(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}) \in A} \left(\left(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}\right) \times_t M_t \right). \quad (5)$$

Полагая

$A \times_t M_t = \left\{ \left(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}\right) \times_t M_t \Big/ \left(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}\right) \in A \right\}$, получаем, с учетом равенства (4), что

$$A^{(t)} = A \times_t M_t. \quad (6)$$

Операцию $\times_t$ будем называть, далее, декартовым произведением по направлению *t*.

Из определения (4) следует, что

$$\left(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}\right) \times_t M_t = \begin{cases} \{(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n})\}, \text{ если } t \in \{i_1; i_2; \dots; i_n\}; \\ (\dots((M_t \times \{a_{i_1}\}) \times \dots) \times \{a_{i_n}\}), \text{если } 1 \le t < i_1; \\ ((\dots((\{(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}})\} \times M_t) \times \{a_{i_k}\}) \times \dots) \times \{a_{i_n}\}), \\ \quad \text{если } i_{k-1} < t < i_k \text{ для некоторого } k \in \{2; 3; \dots; n\}; \\ \{\left(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}\right)\} \times M_t, \text{если } t > i_n, \end{cases} \quad (7)$$

где $\times$ - обычная операция декартова умножения множеств.

Соотношения (4) - (7) обуславливают возможность выражения операции $\pi^{(t)}$ через операцию $\times$.

Определение 3. Отношение $A \in \boldsymbol{A}(M)$ называется *t*-цилиндром, если $A = ({}^{(t)}A)^{(t)}$.

Предложение 3. Пусть $A \in \boldsymbol{A}_{(i_1; i_2; \dots; i_n)}$ и $t \in N$. Тогда для любого $t \notin \{i_1; i_2; \dots; i_n\}$ отношение $A^{(t)}$ является *t*-цилиндром.

Доказательство.

а) В соответствии с определением 3, нужно доказать равенство

$$A^{(t)} = \left({}^{(t)}(A^{(t)})\right)^{(t)}. \quad (8)$$

По предложению 2.в), имеем $A = {}^{(t)}(A^{(t)})$. Применяя к отношениям левой и правой частей этого равенства операцию t- цилиндрификации, получим равенство (8).

Отметим ряд совместных свойств операций проектирования и цилиндрификации и теоретико-множественных операций $\cup$; $\cap$; $\overline{}$.

Предложение 4. $A; A_1; A_2 \in \boldsymbol{A}_{(i_1; i_2; \dots; i_n)}(M)$ и $t \in N$. Тогда а) ${}^{(t)}(A_1 \cup A_2) = {}^{(t)}A_1 \cup {}^{(t)}A_2$;

б) ${}^{(t)}(A_1 \cap A_2) \subseteq {}^{(t)}A_1 \cap {}^{(t)}A_2$;

в) $(A_1 \cap A_2)^{(t)} = A_1^{(t)} \cap A_2^{(t)}$;

г) $(A_1 \cup A_2)^{(t)} = A_1^{(t)} \cup A_2^{(t)}$;

д) $\overline{{}^{(t)}A} \subseteq {}^{(t)}(\bar{A})$;

е) $\overline{A^{(t)}} = \bar{A} \times_{\boldsymbol{t}} M_{\boldsymbol{t}}$;

ж) $\overline{A^{(t)}} = (\bar{A})^{(t)}$.

Прежде чем приступить к формальному доказательству этого предложения, сделаем несколько замечаний содержательного характера.

Равенство ${}^{(t)}(A_1 \cup A_2) = {}^{(t)}A_1 \cup {}^{(t)}A_2$ пункта а) этого предложения означает, что проекция объединения двух отношений вдоль некоторой координаты равна объединению проекций этих отношений вдоль той же координаты. Т.е. в содержательном отношении это равенство очевидно.

На первый взгляд очевидным представляется и такое утверждение: проекция пересечения двух отношений вдоль некоторой координаты равна пересечению проекций этих отношений вдоль той же координаты.

Однако, в пункте б) предложения 4 утверждается верность только включения проекции пересечения в пересечение проекций, а не их равенство. Причину, обуславливающую невозможность обратного включения, можно выявить лишь в процессе получения строгих, формализованных аналогов этих утверждений. Такие доказательства в учебно-монографической литературе называют обычно доказательствами рутинного характера и, как правило, не приводят, оставляя их проведение читателям.

Следует отметить, тем не менее, что осознанное умение осуществлять логически обусловленные выкладки формально-символического характера во многом определяет степень сформированности абстрактного логико-алгебраического мышления и уровень общей математической культуры.

В связи с этим, приведем доказательства утверждений пунктов а), б), в), д), е) этого предложения.

Доказательство.

а) Если $t \notin \{i_1; i_2; \dots; i_n\}$, то согласно определению 1.а), получаем, что

$${}^{(t)}(A_1 \cup A_2) = A_1 \cup A_2;\ {}^{(t)}A_1 = A_1;\ {}^{(t)}A_2 = A_2, \tag{9}$$

т.е.

$${}^{(t)}A_1 \cup {}^{(t)}A_2 = A_1 \cup A_2 \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует доказываемое равенство ${}^{(t)}(A_1 \cup A_2) = {}^{(t)}A_1 \cup {}^{(t)}A_2$.

Пусть теперь $t \in \{i_1; i_2; \dots; i_n\}$ и $t = i_k$ для некоторого $k \in \{1; 2; \dots; n\}$. Тогда:

$((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in {}^{(t)}(A_1 \cup A_2)) \Rightarrow^{①}$

$\Rightarrow \left(\exists a_{i_k} \in M_{i_k}\right)((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in (A_1 \cup A_2)) \Rightarrow^{②}$

$\Rightarrow \left(\exists a_{i_k} \in M_{i_k}\right)(((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in A_1) \vee$
$\vee((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in A_2)) \Rightarrow^{③}$
$\Rightarrow ((\exists a_{i_k} \in M_{i_k})((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in A_1) \vee$
$\vee\left(\exists a_{i_k} \in M_{i_k}\right)((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in$
$A_2)) \Rightarrow^{④} (((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in \quad \in {}^{(t)}A_1) \vee ((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in$
${}^{(t)}A_2)) \Rightarrow^{⑤} \left((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}\right) \in$
$\in ({}^{(t)}A_1 \cup {}^{(t)}A_2)).$ (11)

Таким образом, включение ${}^{(t)}(A_1 \cup A_2) \subseteq {}^{(t)}A_1 \cup {}^{(t)}A_2$ - доказано.

Переходы ①,②,③,④,⑤ от посылок к соответствующим заключениям в цепочке логических следований (11) основываются, соответственно, на:

- определении 1.а;
- определении теоретико-множественной операции ∪;
- правилах оперирования с ограниченными кванторами;
- определении 1.а;
- определении теоретико-множественной операции ∪.

Обратное включение доказывается аналогично. Более того, нетрудно убедиться в том, что в цепочке (11) все связки «⇒» - логического следования можно заменить на связки «⇔» - логической эквиваленции.

б) доказательство включения ${}^{(t)}(A_1 \cap A_2) \subseteq {}^{(t)}A_1 \cap {}^{(t)}A_2$ получаем подобно доказательству включения ${}^{(t)}(A_1 \cup A_2) \subseteq {}^{(t)}A_1 \cup {}^{(t)}A_2$, приведенному в пункте а). Заметим, что доказательство этого включения в случае если $t \in \{i_1; i_2; \dots; i_n\}$, получается заменой операций ∪ и ∨ на операции ⋂ и & в цепочке логических следований (11), соответственно.

Отметим также, что в полученном (указанным образом) доказательстве речь идет о существовании хотя бы одного элемента $a_{i_k} \in M_{i_k}$ и, следовательно, об одном и том же кортеже $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n})$, который должен принадлежать или отношению A_1, или отношению A_2, или этим отношениям одновременно.

При попытке доказательства (в случае $t \in \{i_1; i_2; \dots; i_n\}$) обратного включения мы неизбежно сталкиваемся с несколько иной ситуацией. А именно, предполагая, что кортеж $\left(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}\right) \in {}^{(t)}A_1 \cap {}^{(t)}A_2$, мы, в соответствии с определением операции ⋂, получаем, что этот кортеж должен принадлежать как ${}^{(t)}A_1$, так и ${}^{(t)}A_2$. Но тогда будем иметь:

$\left((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}\right) \in {}^{(t)}A_1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\exists a'_{i_k} \in M_{i_k}\right)((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a'_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in A_1);$
$\left((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}\right) \in {}^{(t)}A_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\exists a''_{i_k} \in M_{i_k}\right)((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a''_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in A_2).$

Т.е. в этом случае речь пойдет не об одном, а о двух элементах $a'_{i_k}; a''_{i_k} \in M_{i_k}$, которые могут оказаться различными, а, следовательно, различными окажутся тогда и кортежи $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a'_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n})$ и $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a''_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n})$. Таким образом, не исключена возможность того, что в отношениях A_1 и A_2 не окажется общего кортежа вида $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}$ ни для одного $a_{i_k} \in M_{i_k}$.

в) Используя равенство (6), получаем:

$$(A_1 \cap A_2)^{(t)} = (A_1 \cap A_2) \times_t M =^{①} (A_1 \times_t M) \cap (A_2 \times_t M) = A_1^{(t)} \cap A_2^{(t)}. \tag{12}$$

Отметим, что в цепочке равенств (12), переход ①, т.е. применение закона дистрибутивности операции $\cap$ относительно операции $\times_t$ - декартова произведения по направлению t обусловлено возможностью выражения этой операции через обычную операцию $\times$ - декартова произведения множеств, для которой этот закон имеет место (смотри равенства (4) – (7)).

д) Переходя к доказательству включения $\overline{{}^{(t)}A} \subseteq {}^{(t)}(\bar{A})$, заметим, что для числа t , как номера координаты, могут иметь место две возможности:

д.1) $t \notin \{i_1; i_2; \dots; i_n\}$;

д.2) $t \in \{i_1; i_2; \dots; i_n\}$ и $t = i_k$ для некоторого $k \in \{1; 2; \dots; n\}$.

Рассмотрим каждую из этих возможностей.

д.1) В этом случае, ${}^{(t)}A = A$ и ${}^{(t)}(\bar{A}) = \bar{A}$. Отсюда получаем, что $\overline{{}^{(t)}A} = \bar{A} = {}^{(t)}(\bar{A})$, т.е. $\overline{{}^{(t)}A} = {}^{(t)}(\bar{A})$ и, следовательно, $\overline{{}^{(t)}A} \subseteq {}^{(t)}(\bar{A})$.

д.2) Т.к. $t = i_k$, то

$${}^{(t)}A = \left\{ (a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \Big/ (\exists a_{i_k} \in M)(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in A \right\}.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}
&(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in \overline{{}^{(t)}A} \Rightarrow \left((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \notin {}^{(t)}A\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\forall a_{i_k} \in M_{i_k})\left((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \notin A\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\forall a_{i_k} \in M_{i_k})\left((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in \bar{A}\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists a_{i_k} \in M_{i_k})\left((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in \bar{A}\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in {}^{(t)}(\bar{A}).
\end{aligned} \tag{13}$$

Цепочка логических следований (13) показывает, что $\overline{{}^{(t)}A} \subseteq {}^{(t)}(\bar{A})$.

Отметим, что как и в утверждении б) предложения 4, обратное включение, в общем случае, не имеет места.

Действительно, для доказательства включения ${}^{(t)}(\bar{A}) \subseteq \overline{{}^{(t)}A}$, при $t = i_k$, нужно, из предположения о том, что кортеж $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in {}^{(t)}(\bar{A})$, вывести, что $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in \overline{{}^{(t)}A}$ для любого $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in M_{i_1} \times$

$M_{i_2} \times \quad \times \ldots \times M_{i_{k-1}} \times M_{i_{k+1}} \times \ldots \times M_{i_n}$. Покажем, что в общем случае, это невозможно. Действительно:

$$\left((a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}\right) \in {}^{(t)}(\bar{A}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\exists a_{i_k} \in M_{i_k}\right)\left((a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}) \in \bar{A}\right).$$

Но в этом случае не исключена возможность и того, что существует такой элемент $a'_{i_k} \in M_{i_k}$, для которого будет иметь место принадлежность $(a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a'_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}) \in A$ и, следовательно, $\left(a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}\right) \in {}^{(t)}A$. И тогда $\left(a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}\right) \notin \overline{{}^{(t)}A}$.

Во второй части этой работы будет рассмотрен соответствующий пример.

е) Т.к. $A^{(t)} = A \times_t M_t$ (смотри равенство (6)), то $\overline{{}^{(t)}A} = \overline{A \times_t M_t}$. Т.е. для доказательства требуемого утверждения нужно доказать, что $\overline{A \times_t M_t} = \bar{A} \times_t M_t$.

Докажем это равенство, в предположении, что $t \notin \{i_1; i_2; \ldots; i_n\}$ и $i_k < t < i_{k+1}$ для некоторого $k \in \{1; 2; \ldots; n\}$. Действительно, применяя метод включений, будем иметь

$$(a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_k}; a_t; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}) \in \overline{A \times_t M_t} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_k}; a_t; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}) \notin A \times_t M_t \Leftrightarrow (a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}) \notin A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}) \in \bar{A} \Leftrightarrow (a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_k}; a_t; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}) \in \bar{A} \times_t M_t,$$

для любых $(a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}) \in A$ и $a_t \in M_t$.

4. Приведем, далее, критерий «быть t-цилиндром» и дадим для отношения $A \in \boldsymbol{A}_{(i_1;i_2;\ldots;i_n)}$ описание t-цилиндров с экстремальными (по включению), по сравнению с A, свойствами.

Предложение 5. Пусть $A \in \boldsymbol{A}_{(i_1;i_2;\ldots;i_n)}$. Тогда для любого $t \in \{i_1; i_2; \ldots; i_n\}$:

а) отношение A является t-цилиндром, если и только если эквивалентность

$$\left((a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_n}) \in A\right) \Leftrightarrow \left(\left((a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}) \times_t M_t\right) \subseteq A\right), \tag{14}$$

имеет место для любого $(a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_n}) \in \boldsymbol{\times}_{k=1}^{n} M_{i_k}$;

б) если A - t-цилиндр, то отношение $\bar{A}$ также является t-цилиндром;

в) отношение ${}^{(t)}A \times_t M_t$ есть наименьший (по включению) t-цилиндр, содержащий отношение A;

г) отношение $\left(\overline{{}^{(t)}(\bar{A})}\right)^{(t)}$ является наибольшим (по включению) t-цилиндром, содержащимся отношение A.

Доказательство. а) Это утверждение достаточно очевидно. Приведем для примера, доказательство того, что если A - t-цилиндр, то эквивалентность (14) имеет место.

Пусть A - t-цилиндр, т.е. имеет место, согласно определению 3, равенство $A = ({}^{(t)}A)^{(t)}$. Заменяя в левой и правой частях равенства (6) отношение A на ${}^{(t)}A$, получаем, что $A = {}^{(t)}A \times_t M_t$, т.е.

$$A = \bigcup_{(a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}) \in {}^{(t)}A} \left((a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}) \times_t M_t\right). \tag{15}$$

Пусть теперь $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n})$ - произвольный элемент из множества $\bigtimes_{k=1}^{n} M_{i_k}$.

Доказывая эквивалентность (14), ограничимся ее доказательством только «слева - направо», т.к. в обратную сторону эта эквивалентность очевидна. Т.е. будем доказывать импликацию

$$\Big((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}) \in A\Big) \Rightarrow \Big(((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \times_t M_t\Big) \subseteq A\Big),$$

для любого $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}) \in A$.

Предположим, что $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}) \in A$. Тогда $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in {}^{(t)}A$ и, следовательно, в соответствии с равенством (15), получаем, что

$$(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \times_t M_t \subseteq A.$$

Таким образом, предполагая, что посылка импликации является истинной, мы получили, что и заключение этой импликации также является верным.

б) Пусть A - t-цилиндр. Для доказательства того, что $\bar{A}$ - t-цилиндр покажем, что для $\bar{A}$ выполняется условие вида (14), т.е., что

$$\Big((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_n}) \in \bar{A}\Big) \Leftrightarrow (((a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \times_t M_t) \subseteq \bar{A}). \qquad (14')$$

Докажем эквивалентность $(14')$ «слева - направо», т.к. в обратную сторону она является очевидной. Применяя метод от противного, предположим, что

$$(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in \bar{A} \qquad (16)$$

для некоторого $a \in M_t$, но тем не менее, $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \times_t M_t \nsubseteq \bar{A}$, т.е. существует такой элемент $a' \in M_t$, что

$$(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a'; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in (a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a'; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \times_t M_t,$$

но $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a'; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \notin \bar{A}$. Тогда

$$(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a'; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in A. \qquad (17)$$

Т.к. отношение A, по условию, t-цилиндр, то для этого отношения имеет место эквивалентность (14), т.е. из (17) следует, что $(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \times_t M_t \subseteq A$ и, следовательно,

$$(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in A, \qquad (18)$$

для любого $a_{i_k} \in M_t$.

Но тогда из (18) при $a_{i_k} = a$, получаем

$$(a_{i_1}; a_{i_2}; \dots; a_{i_{k-1}}; a; a_{i_{k+1}}; \dots; a_{i_n}) \in A. \qquad (19)$$

Т.к. утверждение (19) противоречит сделанному предположению (16), то это противное предположение неверно и, следовательно, $\bar{A}$ - t-цилиндр.

в) Из включения $A \subseteq ({}^{(t)}A)^{(t)}$ (смотри предложение 2.г)) и равенства $({}^{(t)}A)^{(t)} = {}^{(t)}A \times_t M_t$ следует, что $A \subseteq {}^{(t)}A \times_t M_t$. Кроме того, ${}^{(t)}A \times_t M_t$ - t-цилиндр. Таким образом, для завершения доказательства, осталось проверить, что

$${}^{(t)}A \times_t M_t \subseteq B, \qquad (20)$$

для любого t-цилиндра $B \in \boldsymbol{A}_{(i_1; i_2; \dots; i_n)}$, удовлетворяющего условию $A \subseteq B$.

Согласно предложению 1.а), из $A \subseteq B$ следует ${}^{(t)}A \subseteq {}^{(t)}B$. Отсюда, в силу пункта б) этого же предложения, получаем, что $({}^{(t)}A)^{(t)} \subseteq ({}^{(t)}B)^{(t)}$, т.е.

$$ {}^{(t)}A \times_t M_t \subseteq {}^{(t)}B \times_t M_t, \tag{21}$$

т.к. $({}^{(t)}A)^{(t)} = {}^{(t)}A \times_t M_t$, а $({}^{(t)}B)^{(t)} = {}^{(t)}B \times_t M_t$. Но ${}^{(t)}B \times_t M_t = B$, т.к. B - t-цилиндр. Из этого равенства, с учетом включения (21), получаем требуемое утверждение (20).

г) Согласно предложению 2.г), имеем

$$\bar{A} \subseteq ({}^{(t)}(\bar{A}))^{(t)}. \tag{22}$$

Из включения (22), переходя к дополнениям (в множестве $\mathsf{X}_{k=1}^{n} M_{i_k}$) отношений $\bar{A}$ и $({}^{(t)}(\bar{A}))^{(t)}$, получаем:

$$\overline{\left({}^{(t)}(\bar{A})\right)^{(t)}} \subseteq A. \tag{23}$$

Но $\overline{\left({}^{(t)}(\bar{A})\right)^{(t)}} = \left(\overline{{}^{(t)}(\bar{A})}\right)^{(t)}$ (смотри предложение 4.ж)). С учетом этого равенства, из включения (23) получаем, что $\left(\overline{{}^{(t)}(\bar{A})}\right)^{(t)} \subseteq A$. Кроме того, согласно предложению 3, $\left(\overline{{}^{(t)}(\bar{A})}\right)^{(t)}$ - t - цилиндр.

Таким образом, для завершения доказательства осталось проверить, что

$$B \subseteq \left(\overline{{}^{(t)}(\bar{A})}\right)^{(t)}. \tag{24}$$

для любого t-цилиндра $B \in \boldsymbol{A}_{(i_1;i_2;\dots;i_n)}$, удовлетворяющего условию $B \subseteq A$.

Пусть B - t-цилиндр и $B \subseteq A$. Тогда, согласно пункту б) этого предложения, $\bar{B}$ - также является t-цилиндром, т.е. $\bar{B} = \left({}^{(t)}(\bar{B})\right)^{(t)}$ (смотри определение 3). Из этого равенства вытекает, что

$$B = \overline{\left({}^{(t)}(\bar{B})\right)^{(t)}}. \tag{25}$$

Из $B \subseteq A$ получаем, что $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ и, следовательно, $\left({}^{(t)}(\bar{A})\right)^{(t)} \subseteq \left({}^{(t)}(\bar{B})\right)^{(t)}$, в соответствии с пунктами а), б) предложения 1. Отсюда получаем, что

$$\overline{\left({}^{(t)}(\bar{B})\right)^{(t)}} \subseteq \overline{\left({}^{(t)}(\bar{A})\right)^{(t)}}. \tag{26}$$

Из (26), используя равенство (25) и равенство $\overline{\left({}^{(t)}(\bar{A})\right)^{(t)}} = \left(\overline{{}^{(t)}(\bar{A})}\right)^{(t)}$, получаем требуемое включение (24).

5. Пусть M - произвольное непустое множество. Через $\boldsymbol{P}^{(\boldsymbol{n})}(M)$ обозначим множество всех n-местных предикатов, определенных на множестве M. Положим

$\boldsymbol{P}(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{P}^{(\boldsymbol{n})}(M)$

С каждым n-местным предикатом $P = P\left(x_{i_1}; x_{i_2}; \dots; x_{i_n}\right) \in \boldsymbol{P}(M)$ свяжем n-местное отношение $A_P \in \boldsymbol{A}_{(i_1;i_2;\dots;i_n)}$ по следующему правилу:

$$A_P = \left\{ {(a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_n})} \Big/ {M \vDash P(a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_n}), a_{i_k} \in M_{i_k},\ (k = 1; 2; \ldots; n)} \right\},$$

(смотри, к примеру [2]).

Таким образом, A_P есть область истинности предиката P, т.е. $A_P = P^*$.

Дадим описание областей истинности $(P_{\exists_{i_k}})^*$ и $(P_{\forall_{i_k}})^*$ предикатов

$$P_{\exists_{i_k}}(x_{i_1}; x_{i_2}; \ldots; x_{i_{k-1}}; x_{i_{k+1}}; \ldots; x_{i_n}) = (\exists x_{i_k})P(x_{i_1}; x_{i_2}; \ldots; x_{i_{k-1}}; x_{i_k}; x_{i_{k+1}}; \ldots; x_{i_n})$$

и

$$P_{\forall_{i_k}}(x_{i_1}; x_{i_2}; \ldots; x_{i_{k-1}}; x_{i_{k+1}}; \ldots; x_{i_n}) = (\forall x_{i_k})P(x_{i_1}; x_{i_2}; \ldots; x_{i_{k-1}}; x_{i_k}; x_{i_{k+1}}; \ldots; x_{i_n}),$$

$1 \le k \le n$, исходя из области истинности P^* предиката P.

Предложение 6. Пусть $P = P(x_{i_1}; x_{i_2}; \ldots; x_{i_n}) \in \boldsymbol{P}(M)$ и $1 \le k \le n$. Тогда:

а) $(P_{\exists_{i_k}})^* = {}^{(i_k)}(P^*)$, т.е. область истинности предиката $P_{\exists_{i_k}}$ совпадает с i_k-проекцией области истинности P^* исходного предиката P.

б) $(P_{\forall_{i_k}})^* = \overline{{}^{(i_k)}(\overline{P^*})}$, т.е. область истинности предиката $P_{\forall_{i_k}}$ совпадает с дополнением i_k-проекции ${}^{(i_k)}(\overline{P^*})$ дополнения $\overline{P^*}$ области истинности P^* исходного предиката P.

Доказательство. а) Пусть $a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n} \in M$. Тогда, основываясь на определении 1.а), получаем:

$$((a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}) \in P^*_{\exists_{i_k}}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(M \vDash (\exists x_{i_k})P\left(a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots a_{i_{k-1}}; x_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}\right)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists a \in M)\left((a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}\right) \in P^*) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left((a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}) \in {}^{(i_k)}(P^*)\right).$$

б) Аналогичным образом, если $a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n} \in M$, то исходя из определения 1.б), будем иметь:

$$((a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}) \in P^*_{\forall_{i_k}}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(M \vDash (\forall x_{i_k})P\left(a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots a_{i_{k-1}}; x_{i_k}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}\right)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall a \in M)\left((a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}) \in P^*\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall a \in M)\left((a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}) \notin \overline{P^*}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}\right) \notin {}^{(i_k)}(\overline{P^*}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_{k-1}}; a_{i_{k+1}}; \ldots; a_{i_n}\right) \in \overline{{}^{(i_k)}(\overline{P^*})}.$$

В связи с равенством $(P_{\forall_{i_k}})^* = \overline{{}^{(i_k)}\ (\overline{P^*})}$ заметим, что:

i) это равенство представляет собой теоретико-множественный аналог равносильности

$$(\forall x_{i_k})P(x_{i_1}; x_{i_2}; \ldots; x_{i_{k-1}}; x_{i_{k+1}}; \ldots; x_{i_n}) \equiv \overline{(\exists x_{i_k})\overline{P(x_{i_1}; x_{i_2}; \ldots; x_{i_{k-1}}; x_{i_{k+1}}; \ldots; x_{i_n})}}$$

алгебры предикатов;

ii) т.к. $\left(\overline{^{(i_k)}(\overline{P^*})}\right)^{(i_k)}$ - наибольший i_k-цилиндр, содержащийся в отношении P^* (смотри предложение 3 б)), то, с учетом равенства $^{(i_k)}\left(\left(\overline{^{(i_k)}(\overline{P^*})}\right)^{(i_k)}\right) = \overline{^{(i_k)}(\overline{P^*})}$ (смотри предложение 2.в)), область истинности $(P_{\forall_{i_k}})^*$ предиката $P_{\forall_{i_k}}$ можно описать следующим образом.

$(P_{\forall_{i_k}})^*$ есть i_k-проекция наибольшего i_k-цилиндра, содержащегося в области истинности P^*предиката P.

Подобным же образом, равенство

а) $^{(t)}(A_1 \cup A_2) = {^{(t)}A_1} \cup {^{(t)}A_2}$

и включение

б) $^{(t)}(A_1 \cap A_2) \subseteq {^{(t)}A_1} \cap {^{(t)}A_2}$

являются теоретико-множественными аналогами равносильности

$$\left(\exists x_{i_k}\right)\left(P_1(x_{i_1}; x_{i_2}; \dots x_{i_{k-1}}; x_{i_k}; x_{i_{k+1}}; \dots; x_{i_n}) \vee P_2(x_{i_1}; x_{i_2}; \dots x_{i_{k-1}}; x_{i_k}; x_{i_{k+1}}; \dots; x_{i_n})\right) \equiv$$
$$\equiv$$
$$(\exists x_{i_k})P_1(x_{i_1}; x_{i_2}; \dots x_{i_{k-1}}; x_{i_k}; x_{i_{k+1}}; \dots; x_{i_n}) \vee (\exists x_{i_k})P_2(x_{i_1}; x_{i_2}; \dots x_{i_{k-1}}; x_{i_k}; x_{i_{k+1}}; \dots; x_{i_n}))$$

и тождественно-истинной формулы

$$\left(\exists x_{i_k}\right)\left(P_1(x_{i_1}; x_{i_2}; \dots x_{i_{k-1}}; x_{i_k}; x_{i_{k+1}}; \dots; x_{i_n}) \& P_2(x_{i_1}; x_{i_2}; \dots x_{i_{k-1}}; x_{i_k}; x_{i_{k+1}}; \dots; x_{i_n})\right) \to$$
$$\to$$
$$\left((\exists x_{i_k})P_1(x_{i_1}; x_{i_2}; \dots x_{i_{k-1}}; x_{i_k}; x_{i_{k+1}}; \dots; x_{i_n}) \& (\exists x_{i_k})P_2(x_{i_1}; x_{i_2}; \dots x_{i_{k-1}}; x_{i_k}; x_{i_{k+1}}; \dots; x_{i_n})\right),$$

соответственно.

Литература

1. Х. Роджерс. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. - М.: Мир, 1972.

2. С. С. Гончаров, Б. Н. Дроботун, А. А. Никитин. Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений. Новосибирск: изд-во Учреждения Российской академии образования «Институт педагогических исследований одаренности детей», 2009, Часть I, II.

Использование эпистемодидактических единиц измерения при оценке и сравнении уровней учебного материала

УДК 37.02

Никитина Ольга Александровна

Федеральное государственное научное учреждение «Институт педагогических исследований одаренности детей» Российской академии образования

Россия, г. Новосибирск, ул. Приморская 22, телефон: (383) 345 80 21

edusoft@ngs.ru

В работе представлено применение эпистемодидактических оценок и сравнений уровней учебного материала из многоуровневых учебников по математике для пятых-одиннадцатых классов общеобразовательной школы.

Ключевые слова: эпистема, эпистемодидактическая единица измерения, уровень обучения, математика

С целью проведения сопоставлений и сравнений показателей учебной деятельности и учебных процессов исследователи вводят и используют различные единицы измерения. В частности, в работе Никитина А.А., Ефремова А.П., Силантьева И.В. [9, с. 4] в 2006 году было введено понятие эпистемы с точки зрения педагогики, как некоторой условной единицы измерения.

Развивая этот подход, предположим, что зафиксирована некоторая эпистема e, которую в некотором смысле принимаем за единицу измерения эпистем (измерение может производиться с учетом объема материала, времени изучения, уровней обучения и т.д.). Будем такую эпистему e называть эпистемодидактической единицей измерения.

Рассмотрим применение эпистемодидактических представлений и оценок уровней учебного материала по математике для многоуровневых учебников [2-8] для пятых-одиннадцатых классов общеобразовательной школы, в которых предложен вариант реализации программы профильного обучения [1].

Традиционно, содержание учебника состоит из глав, главы – из параграфов, каждый параграф – из пунктов. Предположим, что каждый пункт содержит один новый элемент знания или одну новую идею для изучения, другими словами, одну новую эпистему. Если каждый пункт рассматривать как одну эпистему, то можно формировать количественные оценки учебного материала, в частности, по уровням обучения.

Каждый параграф может содержать пункты, относящиеся к базовому, углубленному и профильному (допредпрофильному в пятых-седьмых классах, предпрофильному в восьмых-девятых классах, профильному в десятых-одиннадцатых классах) уровням обучения.

Рассматривая поурочное тематическое планирование учебного материала для многоуровневых учебников [2-8], можно отметить, что:

1) уроки на первом уровне обучения содержат преимущественно эпистемы (пункты) базового уровня, а также необходимые для согласованного изложения и усвоения учебного материала эпистемы, представляющие собой определения понятий и отдельные формулировки без доказательств, относящиеся ко второму и третьему уровням обучения;

2) уроки на втором уровне обучения содержат преимущественно эпистемы базового и углубленного уровней, а также необходимые для согласованного изложения и усвоения учебного материала эпистемы, представляющие собой определения понятий и отдельные формулировки без доказательств, относящиеся к третьему уровню обучения;

3) уроки на третьем уровне обучения содержат эпистемы всех трех (базового, углубленного и профильного) уровней обучения.

Предположим, что при изучении эпистемы A: на первом (базовом) уровне A приравнивается к одной эпистемодидактической единице e; на втором (углубленном) уровне эпистема A составляет k эпистемодидактических единиц e, т.е. в k раз больше ($1 \cdot k$ эпистемодидактических единиц e); для изучения этой же эпистемы A на третьем уровне (по отношению ко второму уровню) эпистема A составляет в m эпистемодидактических единиц больше, т.е. составляет $1 \cdot k \cdot m$ эпистемодидактических единиц e, или $k \cdot m$ единиц e.

Если для изучения одна эпистема B на первом (базовом) уровне приравнивается к n эпистемодидактическим единицам e, то при изучении на втором (углубленном) уровне эпистема B составляет в k раз больше эпистемодидактических единиц e, (т.е. $n \cdot k$ единиц e), а при изучения на третьем уровне (по отношению ко второму уровню) эпистема B составляет в m раз больше эпистемодидактических единиц e, (т.е. $n \cdot k \cdot m$ единиц e).

С учетом этих коэффициентов можно рассматривать, сколько эпистемодидактических единиц e составляет изучение эпистем: 1) на втором уровне по сравнению с первым уровнем; 2) на третьем уровне по сравнению со вторым уровнем; 3) на третьем уровне по сравнению с первым уровнем.

В результате получаем, что если на первом уровне имеется p эпистем и, кроме того, изучается q эпистем второго уровня в дополнение к первому уровню, а также изучается r эпистем третьего уровня в дополнение к первому и второму уровням, то взвешенное количество эпистемодидактических единиц e суммарно составляет $n \cdot p + n \cdot k \cdot q + n \cdot k \cdot m \cdot r$. В результате получаем разбиение эпистем по уровням обучения (рис. 1).

	1 уровень	2 уровень	3 уровень
Эпистемы первого уровня	p	P	p
Эпистемы первого уровня, которые относятся к эпистемам второго уровня		q_1	q_1
Эпистемы второго уровня		q_2	q_2
Эпистемы первого уровня, которые относятся к эпистемам третьего уровня			r_1

Эпистемы второго уровня, которые относятся к эпистемам третьего уровня	r_2
Эпистемы третьего уровня	r_3

Рис. 1. Распределение эпистем по уровням обучения

В случае, когда q1 = q2 =q, r1 = r2 =r3 = r, получаем:

	1 уровень	2 уровень	3 уровень
Эпистемы первого уровня	*p*	*P*	*p*
Эпистемы первого уровня, которые относятся к эпистемам второго уровня		*Q*	*q*
Эпистемы второго уровня		*Q*	*q*
Эпистемы первого уровня, которые относятся к эпистемам третьего уровня			*r*
Эпистемы второго уровня, которые относятся к эпистемам третьего уровня			*r*
Эпистемы третьего уровня			*r*

Рис. 2. Распределение эпистем по уровням обучения

Исходя из этого, получаем разбиение на взвешенные эпистемодидактические единицы по уровням обучения (рис. 3).

	1 уровень	2 уровень	3 уровень
Эпистемы первого уровня	$n \cdot p$	$n \cdot p$	$n \cdot p$
Эпистемы первого уровня, которые относятся к эпистемам второго уровня		$n \cdot q$	$n \cdot q$
Эпистемы второго уровня		$n \cdot (k–1) \cdot q$	$n \cdot (k–1) \cdot q$
Эпистемы первого уровня, которые относятся к эпистемам третьего уровня			$n \cdot r$
Эпистемы второго уровня, которые относятся к эпистемам третьего уровня			$n \cdot (k–1) \cdot r$
Эпистемы третьего уровня			$n \cdot k \cdot (m–1) \cdot r$

Рис. 3. Распределение взвешенных эпистемодидактических единиц по уровням обучения

Общее количество эпистем составляет (p + q + r). Поэтому взвешенное значение эпистемодидактических единиц первого уровня равно $n \cdot p + n \cdot q + n \cdot r$.

Общее взвешенное значение эпистемодидактических единиц второго уровня равно $n \cdot (p + q + r) + n \cdot (k–1) \cdot (q + r)$, которое включает изучение всех эпистем первого уровня и всех эпистем второго уровня.

Общее взвешенное значение эпистемодидактических единиц третьего уровня равно $n \cdot (p + q + r) + n \cdot (k–1) \cdot (q + r) + n \cdot k \cdot (m–1) \cdot r$, которое включает изучение всех эпистем первого уровня, всех эпистем второго уровня и всех эпистем третьего уровня. Преобразуя это значение, в итоге получим $n \cdot p + n \cdot k \cdot q + n \cdot k \cdot m \cdot r$.

В результате, получаем некоторые количественные характеристики соотношений уровней обучения (базового, углубленного, профильного) для учебного материала по математике для многоуровневых учебников [2-8] для пятых-одиннадцатых классов общеобразовательной школы (табл. 1–28).

В табл. 1–3 представлены эпистемодидактические разбиения на темы и уровни эпистем в программах курса математики для первого, второго и третьего уровней обучения для пятого класса. В табл. 4 приведены сводные данные по трем соответствующим уровням обучения.

На основании экспертных оценок, полагаем: 1) $n = 1$; 2) $k = 1{,}5$; 3) $k \cdot m = 2$; 4) в табл. 1–28 выражения «без *», «с одной *», «с двумя **» соответственно означают выбор эпистемы первого, второго и третьего уровня.

Заметим, что взвешенные значения для 1 уровня обучения совпадают с суммарными значениями для этого уровня.

Условный коэффициент соответствия уровню обучения для краткости будем обозначать – условный коэффициент.

Таблица 1. Математика 5 класс. Первый уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1***	***1***	
1. Геометрические фигуры	11	2	0	13
2. Об измерении величин	12	0	0	12
3. Натуральные числа	24	0	0	24
4. Отрезок. Ломаная	8	0	2	10
5. Сложение и вычитание натуральных чисел	15	0	0	15
6. Луч, прямая	12	0	0	12
7. Умножение натуральных чисел	34	0	2	36
8. Углы	23	0	0	23
9. Деление натуральных чисел	39	0	0	39
10. Прямоугольные треугольники	10	0	0	10
11. Дроби	76	0	0	76
12. Площадь	19	4	0	23
13.Десятичные дроби	26	2	0	28

14. Практическое сравнение величин	19	1	0	20
15. Применение формул в практической деятельности	4	10	1	15
Итого 1 уровень обучения = *взвешенное значение эпистемодидактических единиц*	332	19	5	356

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для пятого класса на первом уровне обучения, составляет 356 эпистем, из них 332 эпистемы относится к базовому уровню обучения (примерно 93% от общего количества эпистем), 19 эпистем – к углубленному уровню обучения (примерно 5% от общего количества эпистем), 5 эпистем – к допредпрофильному уровню обучения (примерно 2% от общего количества эпистем).

Таблица 2. Математика 5 класс. Второй уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1,5***	***1,5***	
1. Геометрические фигуры	11	4	0	15
взвешенное значение	11	6	0	17
2. Об измерении величин	7	4	0	11
взвешенное значение	7	6	0	13
3. Натуральные числа	17	14	0	31
взвешенное значение	17	21	0	38
4. Отрезок. Ломаная	8	4	3	15
взвешенное значение	8	6	4,5	18,5
5. Сложение и вычитание натуральных чисел	15	1	0	16
взвешенное значение	15	1,5	0	16,5
6. Луч, прямая	8	5	2	15
взвешенное значение	8	7,5	3	18,5
7. Умножение натуральных чисел	32	3	2	37
взвешенное значение	32	4,5	3	39,5
8. Углы	23	0	0	23
взвешенное значение	23	0	0	23
9. Деление натуральных чисел	42	5	0	47
взвешенное значение	42	7,5	0	49,5
10. Прямоугольные треугольники	8	3	0	11
взвешенное значение	8	4,5	0	12,5

11. Дроби	73	1	0	74
взвешенное значение	73	1,5	0	74,5
12. Площадь	18	6	2	26
взвешенное значение	18	9	3	30
13.Десятичные дроби	27	6	4	37
взвешенное значение	27	9	6	42
14. Практическое сравнение величин	19	1	0	20
взвешенное значение	19	1,5	0	20,5
15. Применение формул в практической деятельности	4	10	1	15
взвешенное значение	4	15	1,5	20,5
Итого 2 уровень обучения	312	67	14	393
Итого взвешенное значение эпистемодидактических единиц	312	100,5	21	433,5

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для пятого класса на втором уровне обучения, составляет 393 эпистемы, из них 312 эпистем относится к базовому уровню обучения (примерно 79% от общего количества эпистем), 67 эпистем – к углубленному уровню обучения (примерно 17% от общего количества эпистем), 14 эпистем – к допредпрофильному уровню обучения (примерно 4% от общего количества эпистем). Взвешенное значение с учетом уровня изучаемых эпистем составляет 433,5 эпистемодидактических единиц. Разность между взвешенным по уровню обучения значением эпистемодидактических единиц (433,5 эпистемы) и суммарным количеством эпистем (393 эпистемы) составляет для второго уровня обучения 40,5 эпистем.

Таблица 3. Математика 5 класс. Третий уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя *****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1,5***	***2***	
1. Геометрические фигуры	11	4	4	19
взвешенное значение	11	6	8	25
2. Об измерении величин	7	4	2	13
взвешенное значение	7	6	4	17
3. Натуральные числа	17	14	5	36
взвешенное значение	17	21	10	48
4. Отрезок. Ломаная	8	4	6	18
взвешенное значение	8	6	12	26
5. Сложение и вычитание натуральных	15	1	5	21

чисел				
взвешенное значение	15	1,5	10	26,5
6. Луч, прямая	8	5	5	18
взвешенное значение	8	7,5	10	25,5
7. Умножение натуральных чисел	32	3	6	41
взвешенное значение	32	4,5	12	48,5
8. Углы	23	0	0	23
взвешенное значение	23	0	0	23
9. Деление натуральных чисел	42	5	6	53
взвешенное значение	42	7,5	12	61,5
10. Прямоугольные треугольники	8	2	2	12
взвешенное значение	8	3	4	15
11. Дроби	76	0	0	76
взвешенное значение	76	0	0	76
12. Площадь	17	7	2	26
взвешенное значение	17	10,5	4	31,5
13.Десятичные дроби	27	8	5	40
взвешенное значение	27	12	10	49
14. Практическое сравнение величин	19	1	0	20
взвешенное значение	19	1,5	0	20,5
15. Применение формул в практической деятельности	4	10	1	15
взвешенное значение	4	15	2	21
Итого 3 уровень обучения	314	68	49	431
Итого взвешенное значение эпистемодидактических единиц	314	102	98	514

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для пятого класса на третьем уровне обучения, составляет 431 эпистему, из них 314 эпистем относится к базовому уровню обучения (примерно 73% от общего количества эпистем), 68 эпистем – к углубленному уровню обучения (примерно 16% от общего количества эпистем), 49 эпистем – к допредпрофильному уровню обучения (примерно 11% от общего количества эпистем). Взвешенное значение с учетом уровня изучаемых эпистем составляет 514 эпистемодидактических единиц. Разность между взвешенным по уровню обучения значением эпистемодидактических единиц (514 эпистем) и суммарным количеством эпистем (431 эпистема) составляет для третьего уровня обучения 83 эпистемы.

Таблица 4. Математика 5 класс. Три уровня обучения

Уровень обучения	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
1 уровень	332	19	5	356
2 уровень	312	67	14	393
взвешенное значение	312	100,5	21	433,5
3 уровень	314	68	49	431
взвешенное значение	314	102	98	514

Для программы учебного материала по математике для многоуровневого учебника для пятого класса получаем, что разность взвешенных значений на втором и первом уровнях составляет 77,5 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 22% к первому уровню обучения. Разность взвешенных значений на третьем и втором уровнях составляет 80,5 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 19% ко второму уровню обучения. Разность взвешенных значений на третьем и первом уровнях составляет 158 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 44% к первому уровню обучения.

В табл. 5–7 представлены эпистемодидактические разбиения на темы и уровни эпистем в программах курса математики для первого, второго и третьего уровней обучения для шестого класса. В табл. 8 приведены сводные данные по трем соответствующим уровням обучения.

Таблица 5. Математика 6 класс. Первый уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1***	***1***	
1. Направления и координаты	7	1	0	8
2. Делители и кратные	24	1	0	25
3. Первый признак равенства треугольников	20	0	0	20
4. Целые числа	13	0	1	14
5. Перпендикулярность	16	1	0	17
6. Сложение и вычитание целых чисел	25	0	0	25
7. Окружность. Вписанные и описанные многоугольники	19	1	0	20
8. Умножение и деление целых чисел	23	0	1	24
9. Осевая симметрия	13	0	0	13

10. Дробные числа	30	1	0	31
11. Свойства дробей	29	2	0	31
12. Координатная плоскость	15	0	0	15
13.Пропорции	25	3	0	28
14. Десятичные дроби	9	5	1	15
15. Применение графиков на практике	12	1	0	13
Итого 1 уровень обучения = *взвешенное значение эпистемодидактических единиц*	280	16	3	299

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для шестого класса на первом уровне обучения, составляет 299 эпистем, из них 280 эпистем относится к базовому уровню обучения (примерно 94% от общего количества эпистем), 16 эпистем – к углубленному уровню обучения (примерно 5 от общего количества эпистем), 3 эпистемы – к допредпрофильному уровню обучения (примерно 1% от общего количества эпистем).

Таблица 6. Математика 6 класс. Второй уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1,5***	***1,5***	
1. Направления и координаты	7	1	0	8
взвешенное значение	7	1,5	0	8,5
2. Делители и кратные	24	3	0	27
взвешенное значение	24	4,5	0	28,5
3. Первый признак равенства треугольников	20	0	0	20
взвешенное значение	20	0	0	20
4. Целые числа	13	0	1	14
взвешенное значение	13	0	1,5	14,5
5. Перпендикулярность	13	1	0	14
взвешенное значение	13	1,5	0	14,5
6. Сложение и вычитание целых чисел	25	1	0	26
взвешенное значение	25	1,5	0	26,5
7. Окружность. Вписанные и описанные многоугольники	16	3	0	19

взвешенное значение	16	4,5	0	20,5
8. Умножение и деление целых чисел	18	2	1	21
взвешенное значение	18	3	1,5	22,5
9. Осевая симметрия	13	2	0	15
взвешенное значение	13	3	0	16
10. Дробные числа	22	6	0	28
взвешенное значение	22	9	0	31
11. Свойства дробей	29	4	0	33
взвешенное значение	29	6	0	35
12. Координатная плоскость	15	1	0	16
взвешенное значение	15	1,5	0	16,5
13.Пропорции	25	4	0	29
взвешенное значение	25	6	0	31
14. Десятичные дроби	9	7	1	17
взвешенное значение	9	10,5	1,5	21
15. Применение графиков на практике	12	2	1	15
взвешенное значение	12	3	1,5	16,5
Итого 2 уровень обучения	261	37	4	302
Итого взвешенное значение эпистемодидактических единиц	261	55,5	6	322,5

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для шестого класса на втором уровне обучения, составляет 302 эпистемы, из них 261 эпистема относится к базовому уровню обучения (примерно 86% от общего количества эпистем), 37 эпистем – к углубленному уровню обучения (примерно 12% от общего количества эпистем), 4 эпистемы – к допредпрофильному уровню обучения (примерно 2% от общего количества эпистем). Взвешенное значение с учетом уровня изучаемых эпистем составляет 322,5 эпистемодидактических единиц. Разность между взвешенным по уровню обучения значением эпистемодидактических единиц (332,5 эпистем) и суммарным количеством эпистем (302 эпистем) составляет для второго уровня обучения 30,5 эпистем.

Таблица 7. Математика 6 класс. Третий уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1,5***	***2***	
1. Направления и координаты	7	1	2	10
взвешенное значение	7	1,5	4	12,5

2. Делители и кратные	22	3	8	33
взвешенное значение	22	4,5	16	42,5
3. Первый признак равенства треугольников	19	0	2	21
взвешенное значение	19	0	4	23
4. Целые числа	13	0	2	15
взвешенное значение	13	0	4	17
5. Перпендикулярность	16	1	2	19
взвешенное значение	16	1,5	4	21,5
6. Сложение и вычитание целых чисел	26	1	2	29
взвешенное значение	26	1,5	4	31,5
7. Окружность. Вписанные и описанные многоугольники	16	3	3	22
взвешенное значение	16	4,5	6	26,5
8. Умножение и деление целых чисел	18	2	5	25
взвешенное значение	18	3	10	31
9. Осевая симметрия	13	2	1	16
взвешенное значение	13	3	2	18
10. Дробные числа	22	6	2	30
взвешенное значение	22	9	4	35
11. Свойства дробей	24	4	6	34
взвешенное значение	24	6	12	42
12. Координатная плоскость	16	1	1	18
взвешенное значение	16	1,5	2	19,5
13.Пропорции	29	4	4	37
взвешенное значение	29	6	8	43
14. Десятичные дроби	9	7	2	18
взвешенное значение	9	10,5	4	23,5
15. Применение графиков на практике	12	2	3	17
взвешенное значение	12	3	6	21
Итого 3 уровень обучения	262	37	45	344
Итого взвешенное значение эпистемодидактических единиц	262	55,5	90	407,5

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для шестого класса на третьем уровне обучения, составляет 344 эпистемы, из них 262 эпистемы относится к базовому уровню обучения (примерно 76% от общего количества эпистем), 37 эпистем – к углубленному уровню обучения (примерно 11% от общего количества эпистем), 45 эпистем – к допредпрофильному уровню обучения (примерно 13% от общего количества эпистем). Взвешенное значение эпистем составляет 407,5 эпистемодидактических единиц. Разность между взвешенным по уровню обучения значением эпистемодидактических единиц (407,5 эпистем) и суммарным количеством эпистем (344 эпистемы) составляет для третьего уровня обучения 63,5 эпистем.

Таблица 8. Математика 6 класс. Три уровня обучения

Уровень обучения	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистемс двумя ****	**Итого**
1 уровень	280	16	3	299
2 уровень	261	37	4	302
взвешенное значение	261	55,5	6	322,5
3 уровень	262	37	45	344
взвешенное значение	262	55,5	90	407,5

Для программы учебного материала по математике для многоуровневого учебника для шестого класса получаем, что разность взвешенных значений на втором и первом уровнях составляет 23,5 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 8% к первому уровню обучения. Разность взвешенных значений на третьем и втором уровнях составляет 85 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 26% ко второму уровню обучения. Разность взвешенных значений на третьем и первом уровнях составляет 108,5 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 36% к первому уровню обучения.

В табл. 9–11 представлены эпистемодидактические разбиения на темы и уровни эпистем в программах курса математики для первого, второго и третьего уровней обучения для седьмого класса. В табл. 12 приведены сводные данные по трем соответствующим уровням обучения.

Таблица 9. Математика 7 класс. Первый уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1***	***1***	
1. Углы	11	0	0	11
2. Степень с целым показателем	18	0	0	18
3. Тождества	31	0	0	31
4. Равенство треугольников	19	0	0	19
5. Уравнения	23	1	0	24

6. Параллельность	18	0	0	18
7. Неравенства	31	0	0	31
8. Параллелограмм	20	1	0	21
9. Пропорциональные отрезки	19	0	2	21
10. Линейная функция	22	0	0	22
11. Свойства окружностей	11	0	0	11
12. Системы уравнений	21	0	0	21
13.Многоугольники	14	0	0	14
14. Приближенные вичисления	17	1	0	18
Итого 1 уровень обучения = *взвешенное значение эпистемодидактических единиц*	275	3	2	280

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для седьмого класса на первом уровне обучения, составляет 280 эпистем, из них 275 эпистем относится к базовому уровню обучения (примерно 98% от общего количества эпистем), 3 эпистемы – к углубленному уровню обучения (примерно 1% от общего количества эпистем), 2 эпистемы – к допредпрофильному уровню обучения (примерно 1% от общего количества эпистем).

Таблица 10. Математика 7 класс. Второй уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1,5***	***1,5***	
1. Углы	12	0	0	12
взвешенное значение	12	0	0	12
2. Степень с целым показателем	19	1	0	20
взвешенное значение	19	1,5	0	20,5
3. Тождества	31	3	0	34
взвешенное значение	31	4,5	0	35,5
4. Равенство треугольников	19	4	0	23
взвешенное значение	19	6	0	25
5. Уравнения	23	4	0	27
взвешенное значение	23	6	0	29
6. Параллельность	18	1	0	19
взвешенное значение	18	1,5	0	19,5
7. Неравенства	28	4	1	33
взвешенное значение	28	6	1,5	35,5
8. Параллелограмм	20	2	0	22

взвешенное значение	20	3	0	23
9. Пропорциональные отрезки	24	2	2	28
взвешенное значение	24	3	3	30
10. Линейная функция	22	4	0	26
взвешенное значение	22	6	0	28
11. Свойства окружностей	11	5	0	16
взвешенное значение	11	7,5	0	18,5
12. Системы уравнений	21	1	0	22
взвешенное значение	21	1,5	0	22,5
13.Многоугольники	14	7	1	22
взвешенное значение	14	10,5	1,5	26
14. Приближенные вичисления	21	4	0	25
взвешенное значение	21	6	0	27
Итого 2 уровень обучения	283	42	4	329
Итого взвешенное значение эпистемодидактических единиц	283	63	6	352

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для седьмого класса на втором уровне обучения, составляет 329 эпистем, из них 283 эпистемы относится к базовому уровню обучения (примерно 86% от общего количества эпистем), 42 эпистемы – к углубленному уровню обучения (примерно 13% от общего количества эпистем), 4 эпистемы – к допредпрофильному уровню обучения (примерно 1% от общего количества эпистем). Взвешенное значение с учетом уровня изучаемых эпистем составляет 352 эпистемодидактических единицы. Разность между взвешенным по уровню обучения значением эпистемодидактических единиц (352 эпистем) и суммарным количеством эпистем (329 эпистем) составляет для второго уровня обучения 23 эпистем.

Таблица 11. Математика 7 класс. Третий уровень обучения

Наименование темы	**Количество пунктов без ***	**Количество пунктов с одной ***	**Количество пунктов с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1,5***	***2***	
1. Углы	12	0	2	14
взвешенное значение	12	0	4	16
2. Степень с целым показателем	19	2	15	36
взвешенное значение	19	3	30	52
3. Тождества	31	3	6	40
взвешенное значение	31	4,5	12	47,5

4. Равенство треугольников	19	4	2	25
взвешенное значение	19	6	4	29
5. Уравнения	23	6	5	34
взвешенное значение	23	9	10	42
6. Параллельность	18	1	4	23
взвешенное значение	18	1,5	8	27,5
7. Неравенства	30	4	6	40
взвешенное значение	30	6	12	48
8. Параллелограмм	20	3	2	25
взвешенное значение	20	4,5	4	28,5
9. Пропорциональные отрезки	19	2	2	23
взвешенное значение	19	3	4	26
10. Линейная функция	22	4	6	32
взвешенное значение	22	6	12	40
11. Свойства окружностей	11	5	4	20
взвешенное значение	11	7,5	8	26,5
12. Системы уравнений	22	1	9	32
взвешенное значение	22	1,5	18	41,5
13.Многоугольники	16	7	4	27
взвешенное значение	16	10,5	8	34,5
14. Приближенные вичисления	21	7	0	28
взвешенное значение	21	10,5	0	31,5
Итого 3 уровень обучения	283	49	67	399
Итого взвешенное значение эпистемодидактических единиц	283	73,5	134	490,5

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для седьмого класса на третьем уровне обучения, составляет 399 эпистем, из них 283 эпистемы относится к базовому уровню обучения (примерно 71% от общего количества эпистем), 49 эпистем – к углубленному уровню обучения (примерно 12% от общего количества эпистем), 67 эпистем – к допредпрофильному уровню обучения (примерно 17% от общего количества эпистем). Взвешенное значение с учетом уровня изучаемых эпистем составляет 490,5 эпистемодидактических единиц. Разность между взвешенным по уровню обучения значением эпистемодидактических единиц (490,5 эпистем) и суммарным количеством эпистем (399 эпистем) составляет для третьего уровня обучения 91,5 эпистем.

Таблица 12. Математика 7 класс. Три уровня обучения

Уровень обучения	**Кол-во эпи-стем без ***	**Кол-во эпи-стем с одной ***	**Кол-во эпи-стемс двумя ****	**Итого**
1 уровень	275	3	2	280
2 уровень	283	42	4	329
взвешенное значение	283	63	6	352
3 уровень	283	49	67	399
взвешенное значение	283	73,5	134	490,5

Для программы учебного материала по математике для многоуровневого учебника для седьмого класса получаем, что разность взвешенных значений на втором и первом уровнях составляет 72 эпистемодидактических единицы, что составляет примерно 26% к первому уровню обучения. Разность взвешенных значений на третьем и втором уровнях составляет 138,5 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 39% ко второму уровню обучения. Разность взвешенных значений на третьем и первом уровнях составляет 210,5 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 75% к первому уровню обучения.

В табл. 13–15 представлены эпистемодидактические разбиения на темы и уровни эпистем в программах курса математики для первого, второго и третьего уровней обучения для восьмого класса. В табл. 16 приведены сводные данные по трем соответствующим уровням обучения.

Таблица 13. Математика 8 класс. Первый уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1***	***1***	
1. Занимательные задачи	3	1	0	4
2. Параллельный перенос на координатной плоскости	27	0	0	27
3. Квадратные уравнения	31	2	2	35
4. Гомотетия	13	0	9	22
5. Многочлены	34	4	0	38
6. Подобие	25	3	0	28
7. Алгебраические дроби	15	4	1	20
8. Векторы	28	0	0	28
9. Выражения с радикалами	16	3	0	19
10. Тригонометрические функции острого угла	26	1	0	27
11. Центральные и вписанные углы	14	4	0	18

12. Тригонометрические функции направленного угла	23	2	0	25
13. Метод последовательных приближений (из главы 15)	14	0	1	15
Итого 1 уровень обучения = *взвешенное значение эпистемодидактических единиц*	269	24	13	306

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для восьмого класса на первом уровне обучения, составляет 306 эпистем, из них 269 эпистем относится к базовому уровню обучения (примерно 88% от общего количества эпистем), 24 эпистемы – к углубленному уровню обучения (примерно 8% от общего количества эпистем), 13 эпистем – к предпрофильному уровню обучения (примерно 4% от общего количества эпистем).

Таблица 14. Математика 8 класс. Второй уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1,5***	***1,5***	
1. Занимательные задачи	3	4	0	7
взвешенное значение	3	6	0	9
2. Параллельный перенос на координатной плоскости	27	0	1	28
взвешенное значение	27	0	1,5	28,5
3. Квадратные уравнения	29	3	2	34
взвешенное значение	29	4,5	3	36,5
4. Гомотетия	13	0	8	21
взвешенное значение	13	0	12	25
5. Многочлены	34	4	0	38
взвешенное значение	34	6	0	40
6. Подобие	25	3	0	28
взвешенное значение	25	4,5	0	29,5
7. Алгебраические дроби	15	3	1	19
взвешенное значение	15	4,5	1,5	21
8. Векторы	28	0	0	28
взвешенное значение	28	0	0	28
9. Выражения с радикалами	16	3	0	19
взвешенное значение	16	4,5	0	20,5

10. Тригонометрические функции острого угла	26	1	0	27
взвешенное значение	26	1,5	0	27,5
11. Центральные и вписанные углы	14	1	0	15
взвешенное значение	14	1,5	0	15,5
12. Тригонометрические функции направленного угла	23	0	0	23
взвешенное значение	23	0	0	23
13. Метод последовательных приближений (из главы 15)	14	0	0	14
взвешенное значение	14	0	0	14
Итого 2 уровень обучения	267	22	12	301
Итого взвешенное значение эпистемодидактических единиц	267	33	18	318

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для восьмого класса на втором уровне обучения, составляет 301 эпистему, из них 267 эпистем относится к базовому уровню обучения (примерно 89% от общего количества эпистем), 22 эпистемы – к углубленному уровню обучения (примерно 7% от общего количества эпистем), 12 эпистем – к предпрофильному уровню обучения (примерно 4% от общего количества эпистем). Взвешенное значение с учетом уровня изучаемых эпистем составляет 318 эпистемодидактических единиц. Разность между взвешенным по уровню обучения значением эпистемодидактических единиц (318 эпистем) и суммарным количеством эпистем (301 эпистема) составляет для второго уровня обучения 17 эпистем.

Таблица 15. Математика 8 класс. Третий уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1,5***	***2***	
1. Занимательные задачи	3	5	1	9
взвешенное значение	3	7,5	2	12,5
2. Параллельный перенос на координатной плоскости	27	0	2	29
взвешенное значение	27	0	4	31
3. Квадратные уравнения	32	3	3	38
взвешенное значение	32	4,5	6	42,5
4. Гомотетия	15	0	11	26
взвешенное значение	15	0	22	37

5. Многочлены	34	4	6	44
взвешенное значение	34	6	12	52
6. Подобие	26	4	3	33
взвешенное значение	26	6	6	38
7. Алгебраические дроби	15	4	2	21
взвешенное значение	15	6	4	25
8. Векторы	32	0	0	32
взвешенное значение	32	0	0	32
9. Выражения с радикалами	16	3	11	30
взвешенное значение	16	4,5	22	42,5
10. Тригонометрические функции острого угла	29	1	0	30
взвешенное значение	29	1,5	0	30,5
11. Центральные и вписанные углы	17	4	2	23
взвешенное значение	17	6	4	27
12. Тригонометрические функции направленного угла	27	2	0	29
взвешенное значение	27	3	0	30
13. Метод последовательных приближений (из главы 15)		3	2	28
взвешенное значение	23	4,5	4	31,5
Итого 3 уровень обучения	296	33	43	372
Итого взвешенное значение эпистемодидактических единиц	296	49,5	86	431,5

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для восьмого класса на третьем уровне обучения, составляет 372 эпистемы, из них 296 эпистем относится к базовому уровню обучения (примерно 80% от общего количества эпистем), 33 эпистемы – к углубленному уровню обучения (примерно 9% от общего количества эпистем), 43 эпистемы – к предпрофильному уровню обучения (примерно 11% от общего количества эпистем). Взвешенное значение с учетом уровня изучаемых эпистем составляет 431,5 эпистемодидактических единиц. Разность между взвешенным по уровню обучения значением эпистемодидактических единиц (431,5 эпистем) и суммарным количеством эпистем (372 эпистемы) составляет для третьего уровня обучения 59,5 эпистем.

Таблица 16. Математика 8 класс. Три уровня обучения

Уровень обучения	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистемс двумя ****	**Итого**
1 уровень	269	24	13	306
2 уровень	267	22	12	301
взвешенное значение	267	33	18	318
3 уровень	296	33	43	372
взвешенное значение	296	49,5	86	431,5

Для программы учебного материала по математике для многоуровневого учебника для восьмого класса получаем, что разность взвешенных значений на втором и первом уровнях составляет 12 эпистемодидактических единицы, что составляет примерно 4% к первому уровню обучения. Разность взвешенных значений на третьем и втором уровнях составляет 113,5 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 36% ко второму уровню обучения. Разность взвешенных значений на третьем и первом уровнях составляет 125,5 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 41% к первому уровню обучения.

В табл. 17–19 представлены эпистемодидактические разбиения на темы и уровни эпистем в программах курса математики для первого, второго и третьего уровней обучения для девятого класса. В табл. 20 приведены сводные данные по трем соответствующим уровням обучения.

Таблица 17. Математика 9 класс. Первый уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1***	***1***	
1. Множество	15	0	0	15
2. Системы уравнений	14	1	0	15
3. Центральные и вписанные углы	7	9	0	16
4. Линейные неравенства	11	1	0	12
5. Формулы сложения	15	1	0	16
6. Метрические соотношения в треугольнике	13	0	1	14
7. Квадратные неравенства	17	4	0	21
8. Скалярное произведение векторов	9	0	0	9
9. Комбинаторные задачи	20	0	0	20
10. Числовые функции	23	0	0	23
11. Некоторые кривые на координатной плоскости	10	0	0	10

12. Элементы теории вероятностей	18	0	0	18
13. Элементы математической логики	10	1	0	11
14. Неевклидовы геометрии	0	14	13	27
15. Последовательности. Понятие последовательности, сходящейся нулю	18	0	0	18
Итого 1 уровень обучения = *взвешенное значение эпистемодидактических единиц*	200	31	14	245

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для девятого класса на первом уровне обучения, составляет 245 эпистем, из них 200 эпистем относится к базовому уровню обучения (примерно 82% от общего количества эпистем), 31 эпистема – к углубленному уровню обучения (примерно 13% от общего количества эпистем), 14 эпистем – к предпрофильному уровню обучения (примерно 5% от общего количества эпистем).

Таблица 18. Математика 9 класс. Второй уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1,5***	***1,5***	
1. Множество	15	0	0	15
взвешенное значение	15	0	0	15
2. Системы уравнений	14	3	0	17
взвешенное значение	14	4,5	0	18,5
3. Центральные и вписанные углы	8	9	0	17
взвешенное значение	8	13,5	0	21,5
4. Линейные неравенства	11	1	0	12
взвешенное значение	11	1,5	0	12,5
5. Формулы сложения	17	4	0	21
взвешенное значение	17	6	0	23
6. Метрические соотношения в треугольнике	13	0	1	14
взвешенное значение	13	0	1,5	14,5
7. Квадратные неравенства	14	6	0	20
взвешенное значение	14	9	0	23
8. Скалярное произведение векторов	9	0	0	9

взвешенное значение	9	0	0	9
9. Комбинаторные задачи	20	0	0	20
взвешенное значение	20	0	0	20
10. Числовые функции	23	0	0	23
взвешенное значение	23	0	0	23
11. Некоторые кривые на координатной плоскости	10	2	0	12
взвешенное значение	10	3	0	13
12. Элементы теории вероятностей	18	0	0	18
взвешенное значение	18	0	0	18
13. Элементы математической логики	13	17	0	30
взвешенное значение	13	25,5	0	38,5
14. Неевклидовы геометрии	0	14	13	27
взвешенное значение	0	21	19,5	40,5
15. Последовательности. Понятие последовательности, сходящейся нулю	18	1	0	19
взвешенное значение	18	1,5	0	19,5
Итого 2 уровень обучения	203	57	14	274
Итого взвешенное значение эпистемодидактических единиц	203	85,5	21	309,5

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для девятого класса на втором уровне обучения, составляет 274 эпистемы, из них 203 эпистемы относится к базовому уровню обучения (примерно 74% от общего количества эпистем), 57 эпистем – к углубленному уровню обучения (примерно 21% от общего количества эпистем), 14 эпистем – к предпрофильному уровню обучения (примерно 5% от общего количества эпистем). Взвешенное значение с учетом уровня изучаемых эпистем составляет 309,5 эпистемодидактических единиц. Разность между взвешенным по уровню обучения значением эпистемодидактических единиц (309,5 эпистем) и суммарным количеством эпистем (274 эпистемы) составляет для второго уровня обучения 35,5 эпистем.

Таблица 19. Математика 9 класс. Третий уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1,5***	***2***	
1. Множество	14	0	1	15

взвешенное значение	14	0	2	16
2. Системы уравнений	17	5	10	32
взвешенное значение	17	7,5	20	44,5
3. Центральные и вписанные углы	10	9	6	25
взвешенное значение	10	13,5	12	35,5
4. Линейные неравенства	11	1	7	19
взвешенное значение	11	1,5	14	26,5
5. Формулы сложения	13	6	2	21
взвешенное значение	13	9	4	26
6. Метрические соотношения в треугольнике	14	1	3	18
взвешенное значение	14	1,5	6	21,5
7. Квадратные неравенства	11	6	4	21
взвешенное значение	11	9	8	28
8. Скалярное произведение векторов	11	0	0	11
взвешенное значение	11	0	0	11
9. Комбинаторные задачи	14	1	3	18
взвешенное значение	14	1,5	6	21,5
10. Числовые функции	23	0	4	27
взвешенное значение	23	0	8	31
11. Некоторые кривые на координатной плоскости	10	2	8	20
взвешенное значение	10	3	16	29
12. Элементы теории вероятностей	18	1	2	21
взвешенное значение	18	1,5	4	23,5
13. Элементы математической логики	10	27	0	37
взвешенное значение	10	40,5	0	50,5
14. Неевклидовы геометрии	0	14	17	31
взвешенное значение	0	21	34	55
15. Последовательности. Понятие последовательности, сходящейся нулю	19	1	1	21
взвешенное значение	19	1,5	2	22,5
Итого 3 уровень обучения	195	74	68	337
Итого взвешенное значение эпистемодидактических единиц	195	111	136	442

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для девятого класса на третьем уровне обучения, составляет 337 эпистем, из них 195 эпистем относится к базовому уровню обучения (примерно 58% от общего количества эпистем), 74 эпистемы – к углубленному уровню обучения (примерно 22% от общего количества эпистем), 68 эпистем – к предпрофильному уровню обучения (примерно 20% от общего количества эпистем). Взвешенное значение с учетом уровня изучаемых эпистем составляет 442 эпистемодидактических единицы. Разность между взвешенным по уровню обучения значением эпистемодидактических единиц (442 эпистемы) и суммарным количеством эпистем (337 эпистем) составляет для третьего уровня обучения 105 эпистем.

Таблица 20. Математика 9 класс. Три уровня обучения

Уровень обучения	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистемс двумя ****	**Итого**
1 уровень	200	31	14	245
2 уровень	203	57	14	274
взвешенное значение	203	85,5	21	309,5
3 уровень	195	74	68	337
взвешенное значение	195	111	136	442

Для программы учебного материала по математике для многоуровневого учебника для девятого класса получаем, что разность взвешенных значений на втором и первом уровнях составляет 64,5 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 26% к первому уровню обучения. Разность взвешенных значений на третьем и втором уровнях составляет 132,5 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 43% ко второму уровню обучения. Разность взвешенных значений на третьем и первом уровнях составляет 197 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 80% к первому уровню обучения.

В табл. 21–23 представлены эпистемодидактические разбиения на темы и уровни эпистем в программах курса математики для первого, второго и третьего уровней обучения для десятого класса. В табл. 24 приведены сводные данные по трем соответствующим уровням обучения.

Таблица 21. Математика 10 класс. Первый уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1***	***1***	
1. Аксиоматитечкий метод в математике	3	0	0	3
2. Начала стереометрии	19	0	0	19

3. Действительные числа	18	2	0	20
4. Параллельность прямых и плоскостей	26	1	0	27
5. Предел последовательности	16	0	5	21
6. Перпендикулярность в пространстве	21	0	0	21
7. Показательные и логарифмические функции	33	3	0	36
8. Тригонометрические функции числового аргумента	23	0	0	23
9. Сечения	6	0	0	6
10. Касательная	5	0	0	5
11. События и вероятности	12	1	0	13
12. Углы в пространстве	23	1	0	24
13. Тригонометрические уравнения	17	0	0	17
14. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства	19	2	0	21
15. Комплексные числа	10	0	0	10
Итого 1 уровень обучения = ***взвешенное значение эпистемодидактических единиц***	251	10	5	266

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для десятого класса на первом уровне обучения, составляет 266 эпистем, из них 251 эпистема относится к базовому уровню обучения (примерно 94% от общего количества эпистем), 10 эпистем – к углубленному уровню обучения (примерно 4% от общего количества эпистем), 5 эпистем – к профильному уровню обучения (примерно 2% от общего количества эпистем).

Таблица 22. Математика 10 класс. Второй уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1,5***	***1,5***	
1. Аксиоматитечкий метод в математике	5	0	2	7
взвешенное значение	5	0	3	8
2. Начала стереометрии	22	0	0	22
взвешенное значение	22	0	0	22
3. Действительные числа	27	4	2	33

взвешенное значение	27	6	3	36
4. Параллельность прямых и плоскостей	37	2	0	39
взвешенное значение	37	3	0	40
5. Предел последовательности	31	0	4	35
взвешенное значение	31	0	6	37
6. Перпендикулярность в пространстве	35	0	1	36
взвешенное значение	35	0	1,5	36,5
7. Показательные и логарифмические функции	38	3	0	41
взвешенное значение	38	4,5	0	42,5
8. Тригонометрические функции числового аргумента	39	0	0	39
взвешенное значение	39	0	0	39
9. Сечения	10	2	0	12
взвешенное значение	10	3	0	13
10. Касательная	10	1	0	11
взвешенное значение	10	1,5	0	11,5
11. События и вероятности	18	1	0	19
взвешенное значение	18	1,5	0	19,5
12. Углы в пространстве	39	5	0	44
взвешенное значение	39	7,5	0	46,5
13. Тригонометрические уравнения	30	0	5	35
взвешенное значение	30	0	7,5	37,5
14. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства	23	4	0	27
взвешенное значение	23	6	0	29
15. Комплексные числа	15	0	0	15
взвешенное значение	15	0	0	15
Итого 2 уровень обучения	379	22	14	415
Итого взвешенное значение эпистемодидактических единиц	379	33	21	433

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для десятого класса на втором уровне обучения, составляет 415 эпистем, из них 379 эпистем относится к базовому уровню обучения (примерно 91% от общего количества эпистем), 22 эпистемы – к углубленному уровню обучения (примерно 5% от общего количества эпистем), 14 эпистем – к профильному уровню обучения (примерно 4% от общего количества эпистем). Взвешенное значение с учетом уровня изучаемых эпистем составляет 433 эпистемодидактических единицы. Разность между взвешенным по уровню обучения значением эпистемодидактических единиц (433 эпистемы) и суммарным количеством эпистем (415 эпистем) составляет для второго уровня обучения 18 эпистем.

Таблица 23. Математика 10 класс. Третий уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1,5***	***2***	
1. Аксиоматитечкий метод в математике	4	1	16	21
взвешенное значение	4	1,5	32	37,5
2. Начала стереометрии	20	0	2	22
взвешенное значение	20	0	4	24
3. Действительные числа	22	6	14	42
взвешенное значение	22	9	28	59
4. Параллельность прямых и плоскостей	33	1	5	39
взвешенное значение	33	1,5	10	44,5
5. Предел последовательности	22	0	13	35
взвешенное значение	22	0	26	48
6. Перпендикулярность в пространстве	35	0	4	39
взвешенное значение	35	0	8	43
7. Показательные и логарифмические функции	34	3	7	44
взвешенное значение	34	4,5	14	52,5
8. Тригонометрические функции числового аргумента	39	0	6	45
взвешенное значение	39	0	12	51
9. Сечения	10	2	2	14
взвешенное значение	10	3	4	17
10. Касательная	10	1	8	19
взвешенное значение	10	1,5	16	27,5
11. События и вероятности	18	1	2	21
взвешенное значение	18	1,5	4	23,5
12. Углы в пространстве	39	5	9	53
взвешенное значение	39	7,5	18	64,5

13. Тригонометрические уравнения	24	0	10	34
взвешенное значение	24	0	20	44
14. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства	17	4	6	27
взвешенное значение	17	6	12	35
15. Комплексные числа	13	0	0	13
взвешенное значение	13	0	0	13
Итого 3 уровень обучения	340	24	104	468
Итого взвешенное значение эпистемодидактических единиц	340	36	208	584

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для десятого класса на третьем уровне обучения, составляет 468 эпистем, из них 340 эпистем относится к базовому уровню обучения (примерно 73% от общего количества эпистем), 24 эпистемы – к углубленному уровню обучения (примерно 5% от общего количества эпистем), 104 эпистемы – к профильному уровню обучения (примерно 22% от общего количества эпистем). Взвешенное значение с учетом уровня изучаемых эпистем составляет 584 эпистемодидактических единицы. Разность между взвешенным по уровню обучения значением эпистемодидактических единиц (584 эпистемы) и суммарным количеством эпистем (468 эпистем) составляет для третьего уровня обучения 116 эпистем.

Таблица 24. Математика 10 класс. Три уровня обучения

Уровень обучения	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистемс двумя ****	**Итого**
1 уровень	379	22	14	415
2 уровень	379	33	21	433
взвешенное значение	340	24	104	468
3 уровень	340	36	208	584
взвешенное значение	379	22	14	415

Для программы учебного материала по математике для многоуровневого учебника для десятого класса получаем, что разность взвешенных значений на втором и первом уровнях составляет 167 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 63% к первому уровню обучения. Разность взвешенных значений на третьем и втором уровнях составляет 151 эпистемодидактических единицы, что составляет примерно 35% ко второму уровню обучения. Разность взвешенных значений на третьем и первом уровнях составляет 318 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 120% к первому уровню обучения.

В табл. 25–27 представлены эпистемодидактические разбиения на темы и уровни эпистем в программах курса математики для первого, второго и третьего уровней обучения для одиннадцатого класса. В табл. 28 приведены сводные данные по трем соответствующим уровням обучения.

Таблица 25. Математика 11 класс. Первый уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1***	***1***	
1. Предел и непрерывность	22	1	0	23
2. Сфера и шар	20	3	0	23
3. Производная	15	1	0	16
4. Координаты и векторы в пространстве	34	0	0	34
5. Исследование функций	20	0	0	20
6. Метод координат в пространстве	28	2	0	30
7. Уравнение с неизвестной функцией и ее производными	13	1	0	14
8. Площадь и объем	14	0	0	14
9. Определенный интеграл	14	0	0	14
10. Условная вероятность	12	2	0	14
11. Комплексные числа	8	1	0	9
12. Геометрические фигуры	5	0	0	5
13. Периодические функции	9	0	0	9
14. Применение комплексных чисел	6	0	0	6
Итого 1 уровень обучения = ***взвешенное значение эпистемодидактических единиц***	220	11	0	231

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для одиннадцатого класса на первом уровне обучения, составляет 231 эпистему, из них 220 эпистем относится к базовому уровню обучения (примерно 95% от общего количества эпистем), 11 эпистем – к углубленному уровню обучения (примерно 5% от общего количества эпистем).

Таблица 26. Математика 11 класс. Второй уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1,5***	***1,5***	
1. Предел и непрерывность	21	10	1	32
взвешенное значение	21	15	1,5	37,5
2. Сфера и шар	26	5	3	34
взвешенное значение	26	7,5	4,5	38
3. Производная	15	1	1	17
взвешенное значение	15	1,5	1,5	18
4. Координаты и векторы в пространстве	43	5	0	48
взвешенное значение	43	7,5	0	50,5
5. Исследование функций	23	4	4	31
взвешенное значение	23	6	6	35
6. Метод координат в пространстве	45	8	3	56
взвешенное значение	45	12	4,5	61,5
7. Уравнение с неизвестной функцией и ее производными	14	3	2	19
взвешенное значение	14	4,5	3	21,5
8. Площадь и объем	20	1	0	21
взвешенное значение	20	1,5	0	21,5
9. Определенный интеграл	16	0	0	16
взвешенное значение	16	0	0	16
10. Условная вероятность	13	2	0	15
взвешенное значение	13	3	0	16
11. Комплексные числа	10	5	0	15
взвешенное значение	10	7,5	0	17,5
12. Геометрические фигуры	6	0	25	31
взвешенное значение	6	0	37,5	43,5
13. Периодические функции	10	0	7	17
взвешенное значение	10	0	10,5	20,5
14. Применение комплексных чисел	17	0	5	22
взвешенное значение	17	0	7,5	24,5
Итого 2 уровень обучения	279	44	51	374
Итого взвешенное значение эпистемодидактических единиц	279	66	76,5	421,5

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для одиннадцатого класса на втором уровне обучения, составляет 374 эпистемы, из них 279 эпистем относится к базовому уровню обучения (примерно 75% от общего количества эпистем), 44 эпистемы – к углубленному уровню обучения (примерно 12% от общего количества эпистем), 51 эпистема – к профильному уровню обучения (примерно 13% от общего количества эпистем). Взвешенное значение с учетом уровня изучаемых эпистем составляет 421,5 эпистемодидактических единиц. Разность между взвешенным по уровню обучения значением эпистемодидактических единиц (421,5 эпистем) и суммарным количеством эпистем (374 эпистемы) составляет для второго уровня обучения 47,5 эпистем.

Таблица 27. Математика 11 класс. Третий уровень обучения

Наименование темы	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистем с двумя ****	**Итого**
Условный коэффициент	***1***	***1,5***	***2***	
1. Предел и непрерывность	21	9	9	39
взвешенное значение	21	13,5	18	52,5
2. Сфера и шар	21	3	13	37
взвешенное значение	21	4,5	26	51,5
3. Производная	15	1	4	20
взвешенное значение	15	1,5	8	24,5
4. Координаты и векторы в пространстве	36	5	15	56
взвешенное значение	36	7,5	30	73,5
5. Исследование функций	19	4	12	35
взвешенное значение	19	6	24	49
6. Метод координат в пространстве	40	9	12	61
взвешенное значение	40	13,5	24	77,5
7. Уравнение с неизвестной функцией и ее производными	14	2	7	23
взвешенное значение	14	3	14	31
8. Площадь и объем	23	1	2	26
взвешенное значение	23	1,5	4	28,5
9. Определенный интеграл	16	0	7	23
взвешенное значение	16	0	14	30
10. Условная вероятность	18	2	3	23
взвешенное значение	18	3	6	27
11. Комплексные числа	10	3	5	18
взвешенное значение	10	4,5	10	24,5
12. Геометрические фигуры	6	0	26	32

взвешенное значение	6	0	52	58
13. Периодические функции	10	0	7	17
взвешенное значение	10	0	14	24
14. Применение комплексных чисел	16	1	8	25
взвешенное значение	16	1,5	16	33,5
Итого 3 уровень обучения	265	40	130	435
Итого взвешенное значение эпистемодидактических единиц	265	60	260	585

Суммарное количество эпистем, предлагаемых для изучения в курсе математики для одиннадцатого класса на третьем уровне обучения, составляет 435 эпистем, из них 265 эпистем относится к базовому уровню обучения (примерно 61% от общего количества эпистем), 40 эпистем – к углубленному уровню обучения (примерно 9% от общего количества эпистем), 130 эпистем – к профильному уровню обучения (примерно 30% от общего количества эпистем). Взвешенное значение с учетом уровня изучаемых эпистем составляет 585 эпистемодидактических единиц. Разность между взвешенным по уровню обучения значением эпистемодидактических единиц (585 эпистем) и суммарным количеством эпистем (435 эпистем) составляет для третьего уровня обучения 150 эпистем.

Таблица 28. Математика 11 класс. Три уровня обучения

Уровень обучения	**Кол-во эпистем без ***	**Кол-во эпистем с одной ***	**Кол-во эпистемс двумя ****	**Итого**
1 уровень	220	11	0	231
2 уровень	279	44	51	374
взвешенное значение	279	66	76,5	421,5
3 уровень	265	40	130	435
взвешенное значение	265	60	260	585

Для программы учебного материала по математике для многоуровневого учебника для одиннадцатого класса получаем, что разность взвешенных значений на втором и первом уровнях составляет 190,5 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 82% к первому уровню обучения. Разность взвешенных значений на третьем и втором уровнях составляет 163,5 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 39% ко второму уровню обучения. Разность взвешенных значений на третьем и первом уровнях составляет 354 эпистемодидактических единиц, что составляет примерно 153% к первому уровню обучения.

Полученные количественные характеристики позволяют сопоставлять материал первого (базового), второго (углубленного), третьего (профильного) уровней.

Вообще говоря, уровней обучения может быть несколько. Коэффициенты, используемые в расчетах, могут зависеть от объема материала, времени изучения и т.д.

Использование аналогичных расчетов и рассуждений (с учетом экспертных оценок) позволяет, например, сравнивать различные учебники по одной или нескольким дисциплинам, а также программы курсов, стандарты, проводить сравнение различных систем обучения.

Литература

1. В.С. Белоносов, В.В. Козлов, А.А. Мальцев, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, А.А. Никитин, М.В. Фокин. Программа многоуровневого курса математики с 5 по 11 класс / Под редакцией В.В. Козлова и А.А. Никитина. Москва, Новосибирск, 2011. 204 с.
2. В.С. Белоносов, В.В. Козлов, А.А. Мальцев, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, А.А. Никитин, М.В. Фокин. Математика. Учебник для 5 класса общеобразовательных учебных заведений / Под редакцией В.В. Козлова и А.А. Никитина. Новосибирск: ИПИО РАО, 2009. 392 с.
3. В.С Белоносов, В.В. Козлов, А.А. Мальцев, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, А.А. Никитин, М.В. Фокин. Математика. Учебник для 6 класса общеобразовательных учебных заведений / Под редакцией В.В. Козлова и А.А. Никитина. Новосибирск: ИПИО РАО, 2010. 344 с.
4. В.С. Белоносов, В.В Козлов, А.А. Мальцев, А.А. Марковичев, Ю.В. Михеев, А.А. Никитин, М.В. Фокин. Математика. Учебник для 7 класса общеобразовательных учебных заведений / Под редакцией В.В. Козлова и А.А. Никитина. Новосибирск: ИПИО РАО, 2010. 400 с.
5. В.С. Белоносов, В.В. Козлов, А.А. Мальцев, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, А.А. Никитин, М.В. Фокин. Математика. Учебник для 8 класса общеобразовательных учебных заведений / Под редакцией В.В. Козлова и А.А. Никитина. Новосибирск: ИПИО РАО, 2010. 442 с.
6. В.С. Белоносов, В.В. Козлов, А.А. Мальцев, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, А.А. Никитин, М.В. Фокин. Математика. Учебник для 9 класса общеобразовательных учебных заведений / Под редакцией В.В. Козлова и А.А. Никитина. Новосибирск: ИПИО РАО, 2010. 456 с.
7. В.С. Белоносов, В.В. Козлов, А.А. Мальцев, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, А.А. Никитин, М.В. Фокин. Математика. Учебник для 10 класса общеобразовательных учебных заведений / Под редакцией В.В. Козлова и А.А. Никитина. Новосибирск: ИПИО РАО, 2010. 488 с.
8. В.С. Белоносов, В.В. Козлов, А.А. Мальцев, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, А.А Никитин,М.В. Фокин. Математика. Учебник для 11 класса общеобразовательных учебных заведений / Под редакцией В.В. Козлова и А.А. Никитина. Новосибирск: ИПИО РАО, 2010. 600 с.
9. А.А. Никитин ,А.П. Ефремов, И.В. Силантьев. Анализ системы зачетных единиц: от высшей школы к профильному обучению и специализированной подготовке в общеобразовательной школе / Под ред. А.А. Никитина. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2006. 200 с.

Шаги к профессиональному мастерству

УДК 37.018.536”322”:004.9, 37.047

Тихонова Татьяна Ивановна

«Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН»

Россия, г. Новосибирск, пр. Акад. Лаврентьева, 6, tanja@iis.nsk.su

Летняя школа юных программистов является мероприятием, в рамках которого проходят обкатку методики раннего введения в профессию, приобщение учеников к навыкам коллективной работы с применением современных информационных технологий и содействие развитию способностей к практическому программированию.

Ключевые слова; информационные технологии, образование, проектная деятельность, программирование, системы информатики.

Введение

В отличие от ряда летних школ, Летняя школа юных программистов (ЛШЮП) имеет целью не начальное обучение основам компьютерной грамотности или программирования, а развитие профессиональной ориентации школьников, преимущественно старшего школьного возраста. Спецификой этого года организаторы считают отбор учащихся среднего звена. Это обусловлено необходимостью приобщения детей к коллективной работе, проведению пропедевтической работы по изучению основ профессиональной деятельности, а также возможность пролонгированной работы со школьниками. Эта деятельность осуществляется через знакомство с программированием, как с производственной деятельностью, с его проблематикой, методологией, творческими и технологическими аспектами. Новыми понятиями и объектами для изучения становятся программный продукт, технологический процесс разработки, грамотная постановка задачи и ее формализация, рациональное распределение и планирование работ, отладка, оформление, документирование, отчет.

Место и сроки проведения

Расписанием работы Школы были предусмотрены 1 день – для заезда заранее для открытия компьютерных классов Школы и распределения работ, 2 дня для заезда, открытия, презентации мастерских и окончательного формирования списка состава мастерских, 1 день для закрытия ЛШЮП и отъезда участников, 11 учебных дней, 1 день заключительных отчетов мастерских на конференции и демонстрации выполненных проектов, 1 выходной день.

38-я ЛШЮП им. А.П. Ершова была открыта в Новосибирском Академгородке в Малом зале Дома Ученых и проведена в течение 15 дней на базе «Седова Заимка» на берегу реки Обь, с 5 по 19 июля 2013 года. Важное событие началось, как обычно, регистрацией.

После успешно пройденной регистрации участников приветствовали от Министерства науки и инновационной политики Новосибирской области – начальник управления образовательной политики Щукин Владимир Николаевич, представители Сибирской науки в лице Директора ИСИ СО РАН Александра Гурьевича Марчука, заместителя Председателя Президиума СО РАН Василия Михайловича Фомина. От Новосибирского государственного университета участников приветствовал проректор по науке Сергей Викторович Нетесов, постоянные участники наших ЛШЮП – Ирина Травина («Софтлаб-Нск»), Виталий Саяпин (новосибирский филиал компании «Интел»). Пожелала успехов заместитель директора Центра «Дио-Ген» Татьяна Николаевна Захарова. Пожелали плодотворной работы, хорошей погоды, новых идей от от «УниПРО» И. Голосов и от D-Linc Р. Бенц.

После открытия всех ждали автобусы и маршрутное такси, чтобы везти в «Седову Заимку».

Учебный процесс

В общеобразовательный цикл входили лекции и спецкурсы по языкам и системам программирования, обзорные лекции по перспективам и проблемам программирования, истории информатики и дисциплинам, которые позволяют расширить кругозор учащихся во многих областях науки, а также ежедневная «Задача дня» - олимпиада по решению алгоритмических задач. Учебное время экономилось за счет совмещения по времени занятий по языкам программирования, спецкурсов и учебной работы по мастерским. Было также несколько традиционных "ликбезных" курсов по особенностям работы с компьютерами (например, по особенностям работы с операционной системой Linux).

Лекции проводились в дневное время. Некоторые занятия сопровождались демонстрацией программных изделий и практикой по работе с ними для желающих. В этом году удалось организовать замечательный цикл лекций по истории информатики. Очень ценной оказалась подборка материалов Б. Л. Файфеля, оформленная в виде презентаций (эти материалы он использует для чтения лекций студентам в Саратовском политехе). Лекция В. Я. Иванова, который 20 лет работал в США как в Стенфорде, так и в других проектах (на коллайдере), не только посвящалась Вселенной и физике, но и дала возможность расширить кругозор относительно того, что ученые всего мира трудятся в одном направлении. Представители извесных фирм Яндекс и D-Link рассказали соответственно о технологиях поиска и облачных сервисах. «Доступно и просто о формальных методах» рассказал Н.В. Шилов, который является с.н.с. ИСИ СО РАН, но также регулярно читает лекции зарубежным студентам.

Для отработки навыков практического программирования учебный процесс в Летней школе рассредоточивается по нескольким (10-15) учебно-производственным мастерским различных профилей – локальным носителям технологических циклов разработки, в которых школьники получают знания и навыки в процессе коллективной работы над единым проектом.

Главной целью мастерской ставится полное прохождение всего технологического цикла в рамках поставленной задачи, с обязательным отчетом о проделанной работе в конце Школы. Необходимая для этого интенсивность работ заставляет уделять большее внимание стадиям проектирования, как со стороны постановщика задачи, так и со стороны руководителя проекта и организаторов Школы.

Мастерские этого года

1. "Система программирования"

Мастерская была, своего рода, экспериментом на ЛШЮП. Она объединила в себе три части проекта, которые могли бы выполняться как независимые задачи. Тем не менее, три мастера работали с группами учащихся, которые придумали простой и удобный язык программирования на основе языков C++/Java. Был написан оптимизирующий компилятор этого языка в собственное исполняемое представление (байткод). Также была реализована часть проекта, где писали виртуальную машину, которая будет умеет исполнять этот байткод. В третьем подразделении мастерской писали Web IDE – программы пишутся на придуманном языке, а сервер будет обрабатывать все запросы, компилировать и запускать программу, сохранять проект. Также реализовались в IDE и виртуальной машине средства отладки.

В мастерской участники познакомились с языками C++, JavaScript; основами web-дизайна; основами теории компиляции, оптимизаций и автоматического управления памяти; научились работать в команде и SVN; рассмотрели принципы клиент-серверных приложений, ООП и web-программирования (в том числе с использованием модной технологии AJAX).

2. “Алгоритмический трейдинг”

Первые фондовые биржи появились ещё в XVII веке, и с тех пор оставались фактически неизменными до конца 20 века. Информатика дала новый толчок развитию фондовой торговле. С помощью статистики и больших вычислительных мощностей торговля уже не требует участия в ней человека - торговля проходит между машинами. Успешность торговли зависит от качества и «гениальности» алгоритма.

Каждый участник мастерской создавал своего трейдинг бота, и опробовал его на модели реальной биржи, сравнивал эффективность различных алгоритмов. Для этого ребята учили JavaScript, узнали, как общаться с биржей и проводили необходимый анализ.

3. "Что такое язык Си?"

В этой мастерской пытались дать ответ на этот вопрос. Когда изучают язык профессионалов школьники 5-6 классов, необходимо желание учиться и желательно базовое знание какого-нибудь языка программирования (например, Лого или азы Паскаля). С поставленной целью мастерская справилась хорошо, в качестве практической задачи написан словарь (толковый), который по своей сути тоже отвечал на подобные вопросы (например, “Что такое мышка?”, “Что такое чайник?”, “Что такое звезда?”).

4. "Программируем с черепашкой"

Традиционно для учащихся младших классов мы с огромным энтузиазмом берем Лого, как уже достаточно апробированный язык для начального обучения основам процедурного программирования. В ходе работы мастерской освоены основные конструкции и принципы программирования (условия, циклы, вложенные циклы), успешно прошло освоение и использование на практике рекурсии. По возможности разобрана концепция структур данных. За время Летней Школы подробно разобраны и изучены задачи олимпиад по Лого для 5-7 классов. По итогам работы мастерской сверстан тематический сборник задач с решениями.

В мастерской также планомерно проходили разговоры о современном программировании, компьютерной графике и любой другой теме, которая может оказаться интересной участникам. Инструментарий, на котором выполнялись практические задачи – FMSLogo, MS Office.

5. "Программисты против"

В мастерской мы изучали язык Java, решали задачи по программированию и двигались к конечной цели – создание "песочницы" с набором неких физических свойств, объектов, начальных и конечных условий для успешного выполнение задания. С "песочницей" можно взаимодействовать через объекты, реализующие набор интерфейсов "песочницы" на языке Java.

"Песочница" не только позволяет моделировать некие процессы, но и следит за регламентом, корректностью выполнения задач и подсчетом баллов.

Простейшее задание напоминает задания для алгоритмических исполнителей: Доберись из пункта А в пункт Б; Нарисуйте что-либо; Найдите выход из лабиринта и т.п. Конечная цель - "командная песочница", в которой соревнуются команды объектов, зарабатывают рейтинг, пытаются первыми решить поставленную задачу. Например "Игра в футбол", где разные ученики реализуют на Java собственные реализации "футбольных команд".

Аналогичным примером могут быть команды микроорганизмов (или людей на новой планете), которые стараются найти ресурсы, переработать их и победить алгоритмы команды конкурентов по баллам или силой. Также продвинутые учащиеся смогли реализовать задачу под Android.

Для тех школьников, кто хотел участвовать в работе мастерской, были соответствующие требования: знание какого-либо языка программирования; понимание функций, ветвления, массивов и циклов; желание познакомиться с объектно-ориентированным программированием и изучить компьютерный язык Java с самого начала. В качестве инструментария взяты Java SE (ОС Windows 7, 2Gb RAM), Android Developer Tools

6. "Дождь сгладит шероховатости"

На топографической карте неровности рельефа изображаются горизонталями - извилистыми линиями, каждая точка которых имеет одинаковую высоту над уровнем моря. А как найти высоту промежуточных точек? В этом состояла задача первого этапа проекта. Второй этап состоял в том, чтобы показать это всё в проекциях и в объёме. На третьем этапе по мановению мышки пользователя начинает идти дождь. Вода стекает с возвышенностей в низины.

Мастерская успешно справилась с целями и задачами: изучить Delphi, попрактиковаться в его использовании; познакомиться с элементами численных методов; немного вспомнить физику (7-9 класса).

7. "Алгоритмы и структуры данных"

У хорошего программиста в арсенале должны быть стандартные алгоритмы, из которых в дальнейшем он сможет по кусочкам собирать какую-то сложную систему.

В рамках мастерской ученики познакомились со стандартными алгоритмами, узнали, где их можно применять, а где не стоит, познакомились с О-нотацией и научились оценивать время работы этих алгоритмов. Также они узнали, почему в программировании лучше думать абстракциями и изучили одну из важнейших абстракций - "структуры данных". В качестве проекта написали простой интерпретатор математических выражений. Программировали на языке C под ОС - ubuntu.

8. “Искусственный интеллект – программирование на языке Лисп”

Проблемы искусственного интеллекта волнуют ученых уже более полувека. И хотя говорить о создании искусственного интеллекта пока преждевременно, на этом направлении достигнуты и определенные успехи. Цель мастерской – создание простой самообучающейся программы (отдаленно похожей на программу, работающую на сайте akinator) – была успешно выполнена и продемонстрирована. Программу написали на языке Лисп (заодно научились программировать на этом замечательном языке и получили представление о функциональном программировании). В качестве инструментария был использован HomeLisp.

9. "Основы робототехники"

Название мастерской говорит само за себя! В рамках работы изучались основы построения роботов, участники учились создавать своих роботов, программировать роботов, устраивать соревнования роботов, делать показательные выступления роботов и многое другое, связанное с роботами!

В программе работы мастерской было знакомство с конструктором Лего и микроконтроллером Lego NXT (воспоминание из детства); знакомство с графическим языком программирования NXT-G; работа с двигателями, сенсорами, передаточными механизмами; разные интересные задачи для роботов.

На практике мы увидели нескольких замечательных роботов, особенно впечатлил тот, который осуществлял сортировку шариков по цветам и раскладывал их в разные контейнеры.

10. " Живые новости: БД + Интернет-ТВ"

Мастерская занималась выполнением проекта, который формировал веб-приложения, предоставляющего доступ к информации об ЛШЮП 2013 года и предыдущих лет. Упор был сделан на создание видео-картинки в стиле ТВ и адаптация информационного потока к абоненту.

В рамках проекта созданы Web-приложение, клиентский интерфейс, адаптер к базе данных ЛШЮП, генератор новостного потока и информационных портретов.

За время работы в мастерской участники познакомились со следующими технологиями: C#, HTML-5, XML, изучили основы клиент-серверной технологии, ASP.NET , JavaScript.

11. "Параллельное программирование"

Потребность в высокопроизводительных вычислениях существовала всегда. Параллельное исполнение нескольких потоков в ряде случаев позволяет увеличить производительность в несколько раз. Многоядерность CPU в настоящее время позволяет разбить задачу на одновременно выполняющиеся потоки общим числом до 12, однако суперкомпьютерные кластеры поддерживают до нескольких тысяч потоков. Целью данной мастерской являлось освоение технологии MPI. В течение летней школы написали проект, эффективным образом использующий возможности многопотокового исполнения. Язык разработки проекта – C++ с использованием OpenGL.

12. "Облачное хранилище файлов"

В последнее время набирают популярность методы облачного хранения данных. Традиционное облачное хранение данных подразумевает использование облака серверов. Выигрыш здесь в том, что подключиться мы можем с любой другой машины с выходом в Интернет, при этом, практически не ограничивая размер переносимых данных. Цель мастерской – дать общее представление об облачном хранении данных, обучить использованию сетевых технологий с использованием Microsoft Visual Studio 2010 и языка программирования: C++

В текущем году набор мастеров был осуществлен без видимых трудностей, большую поддержку этому оказал факт того, что бывшие школьники ЛШЮП, став студентами, прекрасно знакомы с методикой преподавания материала. Преподаватели оказываются хорошо подготовленными не только в плане владения необходимым материалом для ведения мастерских, но и психологически готовы работать со школьниками, даже младшего возраста. Согласно статистике, 2 мастера являлись научными сотрудниками СО РАН и НГУ, 6 – сотрудниками программистских организаций, 11 – студентами технических и математических специальностей, 3 мастера – иногородние (Миасс, Санкт-Петербург, Абакан), 12 мастеров имели опыт работы на прошлых Летних Школах, 4 – опыт руководства дипломными проектами, 6 – опыт преподавания в НГУ и других вузах, 6 – опыт преподавания программирования школьникам, 9 мастеров принимали участие в прошлых Летних школах как ученики, 13 мастеров ранее участвовали в производственных проектах.

Мастерам помогали 3 подмастерьев из числа новоиспеченных студентов НГУ, и 1 школьник.

Планирование следующей Летней школы

Формирование рабочей группы оргкомитета из числа студентов приводит к естественной смене состава. Поиск мастеров, привлечение активных производственников, владеющих современными технологиями, согласование времени проведения Летней школы, поиск удобной площадки для ее проведения, учет специфики работы Летней школы на дальней площадке – все эти вопросы решаются заблаговременно. Тем не менее, довольно часто сохраняется некоторое напряжение по поводу вопроса участия того или иного мастера, в некоторых случаях оно остается неподтвержденным вплоть до самого начала ЛШЮП. Очень эффективна работа мастеров, прошедших ЛШЮП в качестве школьников и подмастерьев.

Летняя школа помогла с определением будущей специальности многим старшеклассникам; они, теперь уже выпускники ВУЗов, составляют цвет программистского сообщества в нашей стране и за ее пределами. Не только ради учебы и коллективной работы школьники хотят вернуться в ЛШЮП. Привлекает демократичный доброжелательный микроклимат, который делает неуместными даже простые детские шалости. Каждый, от директора до самого юного участника, осознает свою причастность к созданию атмосферы, где приветствуется активно-сознательное отношение к делу и досугу. Школа оставляет яркий след в жизни учащихся, и потом они возвращаются в нее в качестве мастеров, их помощников, организаторов.

Централизованное тестирование по математике

УДК 372.851:371.263

Михеев Юрий Викторович

Федеральное государственное научное учреждение «Институт педагогических исследований одаренности детей» Российской академии образования

Россия, г. Новосибирск, ул. Приморская, д. 22, телефон: (383) 345-80-21, edusoft@ngs.ru

В статье приводятся тестовые задания по математике, разработанные ИПИО РАО для проверки знаний учащихся специализированных классов Новосибирской области.

Ключевые слова: математика, тест, специализированный класс.

В течение последних лет со времени организации в Новосибирской области губернаторских классов по математике, физике и химии по итогам полугодий проводится централизованное тестирование по математике. Ввиду того, что задачи этих тестовых заданий могут быть интересными многим учителям, работающим с детьми, проявляющими особый интерес к математике, продолжается публикация условий. В данном выпуске приводятся задания, которые использовались в мае 2013 года (подготовил Ю.В. Михеев).

8 класс, май 2013 г.

Вариант 1

№	Задание	Ответ	Рез.
1.	Найдите, сколько нужно добавить воды к 200 г раствора, содержащего 3% соли, чтобы получить раствор, содержащий 2,5% соли.		
2.	Укажите координаты вершины параболы, заданной уравнением $y=-2x^2+5x+3$.		
3.	В прямоугольном треугольнике ABC из вершины B прямого угла проведена биссектриса BL, и известно, что $AL = 3$ см, $LC = 5$ см. Найдите площадь треугольника ABL.		
4.	Найдите все корни уравнения $\lvert x-3\rvert = x$.		
5.	Найдите координаты точек пересечения графика функции $y=x+\dfrac{1}{x}$ с прямой $y=7x-1$.		
6.	Два автомобиля, выезжая из пунктов А и В навстречу друг другу с постоянными скоростями, встречаются через 50 минут. Если бы первый автомобиль увеличил скорость на 4 км/час, то встреча произошла бы через 49 минут. Найдите расстояние между пунктами А и В.		
7.	Найдите все решения системы уравнений $\begin{cases} x(y+2)=(x+3)y+9 \\ x(y-4)=(x-3)y-15 \end{cases}$.		
8.	Найдите площадь трапеции, у которой диагонали равны 5 см и 13 см, а сумма оснований равна 12 см.		
9.	Составьте уравнение с целыми коэффициентами, у которого один из корней равен $5-3\sqrt{3}$.		
10.	В треугольнике ABC на стороне AC расположена точка D. Известно, что $AD : DC = 4 : 3$, $BD = 8$ см и треугольники ABC и ABD подобны. Найдите AC.		
11.	Решите уравнение $5\sqrt{x+2}=x+6$.		
12.	Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(a+2)x^2+(a+3)x+1=0$ имеет единственный корень.		
13.	Найдите количество всех двухзначных чисел, которые делятся на 3, но не делятся на 7.		
14.	В окружности с радиусом 10 см проведена хорда AB длиной 12 см. Касательные к окружности, проведенные через точки A и B, пересекаются в точке C. Найдите длину отрезка AC.		
15.	Решите уравнение $x^4+x^3+x^2=12(x+1)^2$.		
16.	Найдите все решения уравнения $m! + 264 = 18n$, где m и n натуральные числа, а $m!$ обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до m включительно.		

Вариант 2

№	Задание	Ответ	Рез.
1.	Найдите, сколько нужно добавить воды к 300 г раствора, содержащего 4% соли, чтобы получить раствор, содержащий 3,5% соли.		
2.	Укажите координаты вершины параболы, заданной уравнением $y=2x^2-7x-1$.		
3.	В прямоугольном треугольнике ABC из вершины B прямого угла проведена биссектриса BL, и известно, что $AL = 2$ см, $LC = 6$ см. Найдите площадь треугольника ABL.		
4.	Найдите все корни уравнения $\|5-x\|=x$.		
5.	Найдите координаты точек пересечения графика функции $y=x-\frac{1}{x}$ с прямой $y=5x+4$.		
6.	Два автомобиля, выезжая из пунктов А и В навстречу друг другу с постоянными скоростями, встречаются через 40 минут. Если бы второй автомобиль уменьшил скорость на 5 км/час, то встреча произошла бы через 41 минуту. Найдите расстояние между пунктами А и В.		
7.	Найдите все решения системы уравнений $\begin{cases}(x-2)y=x(y+3)-1\\(x+3)y=x(y+4)+10\end{cases}$.		
8.	Найдите площадь трапеции, у которой диагонали равны 8 см и 17 см, а сумма оснований равна 15 см.		
9.	Составьте уравнение с целыми коэффициентами, у которого один из корней равен $7+3\sqrt{5}$.		
10.	В треугольнике ABC на стороне AC расположена точка D. Известно, что $AD : DC = 5 : 2$, $AC = 8$ см и треугольники ABC и ABD подобны. Найдите BD.		
11.	Решите уравнение $6\sqrt{x-1}=x+4$.		
12.	Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2+(a-1)x+1=0$ имеет единственный корень.		
13.	Найдите количество всех двухзначных чисел, которые делятся на 7, но не делятся на 3.		
14.	В окружности с радиусом 10 см проведена хорда AB длиной 16 см. Касательные к окружности, проведенные через точки A и B, пересекаются в точке C. Найдите длину отрезка AC.		
15.	Решите уравнение $x^4-x^3-x^2=20(x+1)^2$.		
16.	Найдите все решения уравнения $m! + 222 = 18n$, где m и n натуральные числа, а $m!$ обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до m включительно.		

9 класс, май 2013 г.

Вариант 1

№	Задание	Ответ	Рез.
1.	Решите неравенство $\dfrac{x-5\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}\ge 0$.		
2.	При смешивании *M* г раствора, содержащего 3% соли, и *K* г раствора, содержащего 4% соли, получили раствор, содержащий 3,5% соли. Найдите отношение *M* : *K*.		
3.	Найдите площадь трапеции, у которой диагонали равны 5 см и 12 см, а сумма оснований равна 13 см.		
4.	Найдите все действительные корни уравнения $x^2+2(\sqrt{5}-\sqrt{2})x+1=0$.		
5.	Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+4y^2=24 \\ xy=6 \end{cases}$.		
6.	Найдите $\sin\alpha$, если известно, что α в III четверти и $\mathrm{tg}\alpha=0{,}3$.		
7.	В треугольнике ABC точки M и N расположены соответственно на сторонах BC и AC так, что $BM : MC = CN : NA = 1 : 2$. Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BN}$.		
8.	В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота BH к гипотенузе AC. Известно, что $AH=1$ см, $BC=2\sqrt{5}$ см. Найдите площадь треугольника ABC.		
9.	Решите уравнение $x^4+x^3+x^2=12(x+1)^2$.		
10.	Из набора, содержащего монеты по 5 коп и по 10 коп, монету в 10 коп. можно выбрать с вероятностью $\frac{5}{7}$. После того как в набор добавили несколько монет по 5 коп, монету в 10 коп стало возможным выбрать с вероятностью $\frac{4}{11}$. Чему равно наименьшее число монет по 5 коп, которое могло быть добавлено?		
11.	Решите уравнение $\left\|x^2-4x+2\right\|=x^2-3x+1$.		
12.	Найдите уравнение параболы, график которой симметричен параболе с уравнением $y=x^2-2x-2$ относительно прямой $y=1$.		
13.	Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(a^2-1)x^2+ax-4=0$ имеет единственный корень.		
14.	Найдите количество натуральных чисел от 100 до 200, которые делятся на 3, но не делятся на 7.		
15.	Две окружности с радиусами 3 см и 4 см, расстояние между центрами которых равно 5 см, пересекаются в точках *A* и *B*. Через точку *B* проводится прямая, которая вторично пересекает эти окружности в точках *C* и *D*, и известно, что *CD* = 9 см. Найдите площадь треугольника *ACD*.		
16.	Найдите все решения уравнения $m! + 264 = 18n$, где m и n натуральные числа, а $m!$ обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до m включительно.		

Вариант 2

№	Задание	Ответ	Рез.
1.	Решите неравенство $\frac{x-6\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1} \geq 0$.		
2.	При смешивании M г раствора, содержащего 4% соли, и K г раствора, содержащего 5% соли, получили раствор, содержащий 4,5% соли. Найдите отношение $M : K$.		
3.	Найдите площадь трапеции, у которой диагонали равны 8 см и 15 см, а сумма оснований равна 17 см.		
4.	Найдите все действительные корни уравнения $x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})x+4=0$.		
5.	Решите систему уравнений $\begin{cases} 9x^2+y^2=42 \\ xy=7 \end{cases}$.		
6.	Найдите $\cos\alpha$, если известно, что α во II четверти и $\mathrm{tg}\alpha=-0{,}2$.		
7.	В треугольнике ABC точки M и N расположены соответственно на сторонах BC и AC так, что $BM : MC = CN : NA = 1 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BN}$.		
8.	В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота BH к гипотенузе AC. Известно, что $CH=4$ см, $AC=\sqrt{5}$ см. Найдите площадь треугольника ABC.		
9.	Решите уравнение $x^4-x^3-x^2=20(x+1)^2$.		
10.	Из набора, содержащего монеты по 5 коп и по 10 коп, монету в 10 коп. можно выбрать с вероятностью $\frac{5}{9}$. После того как в набор добавили несколько монет по 5 коп, монету в 10 коп стало возможным выбрать с вероятностью $\frac{2}{7}$. Чему равно наименьшее число монет по 5 коп, которое могло быть добавлено?		
11.	Решите уравнение $\left\|x^2+4x+2\right\|=x^2+5x+5$.		
12.	Найдите уравнение параболы, график которой симметричен параболе с уравнением $y=x^2+2x+3$ относительно прямой $y=-1$.		
13.	Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(a^2-4)x^2-ax-1=0$ имеет единственный корень.		
14.	Найдите количество натуральных чисел от 100 до 200, которые делятся на 7, но не делятся на 3.		
15.	Две окружности с радиусами 3 см и 4 см, расстояние между центрами которых равно 5 см, пересекаются в точках A и B. Через точку B проводится прямая, которая вторично пересекает эти окружности в точках C и D, и известно, что CD = 7 см. Найдите площадь треугольника ACD.		
16.	Найдите все решения уравнения $m! + 222 = 18n$, где m и n натуральные числа, а $m!$ обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до m включительно.		

10 класс, май 2013 г.

Вариант 1

№	Задание	Ответ	Рез.
1.	Решите неравенство $\dfrac{x-4}{2x-6\sqrt{x}+9} \geq 0$.		
2.	Найдите область определения выражения $\sqrt{5-\dfrac{6}{x}}$.		
3.	В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB=1$ $BC=3$ из вершины B проведены высота BH и биссектриса BL. Найдите площадь треугольника BLH.		
4.	Найдите общие корни уравнений $x^3+2x+4\sqrt{2}=0$ и $x^3-x^2+2+2\sqrt{2}=0$.		
5.	Решите уравнение $\cos 3x = \sin 5x$.		
6.	В правильном тетраэдре $SABC$ с ребром 6 см точка M середина ребра SB. Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через точки C, M и параллельной прямой SA.		
7.	Решите неравенство $\left\|x^2-6x+5\right\| \leq x-1$.		
8.	В треугольнике ABC точки M и N расположены соответственно на сторонах BC и AC так, что $BM : MC = CN : NA = 1 : 2$. Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BN}$.		
9.	Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(a^2-4)\cdot\sqrt{x}-a-2=0$ имеет хотя бы одно решение.		
10.	Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 7, 8, 9.		
11.	Найдите уравнение с целыми коэффициентами, имеющее корнем число $\sqrt{7}-\sqrt{2}$.		
12.	В правильной пирамиде $SABCD$ с вершиной S точки M и N расположены соответственно на ребрах SA и CD так, что $SM : MA = DN : NC = 1 : 2$, отрезок MN пересекается с плоскостью SBD в точке P. Найдите отношение $MP : PN$.		
13.	Найдите все пары натуральных чисел, произведение которых на 11 больше, чем умноженная на 5 их сумма.		
14.	Решите уравнение $2\sin x = \sqrt{\operatorname{tg}(\pi+x)}$.		
15.	Две окружности с радиусами 3 см и 4 см, расстояние между центрами которых равно 5 см, пересекаются в точках A и B. Через точку B проводится прямая, которая вторично пересекает эти окружности в точках C и D, и известно, что площадь треугольника ACD равна 22 см^2. Найдите CD.		
16.	Представьте многочлен $x^4-5x^3+x^2+10x-6$ в виде произведения двух многочленов степени меньше 4 с целыми коэффициентами.		

Вариант 2

№	Задание	Ответ	Рез.
1.	Решите неравенство $\dfrac{x-9}{3x-14\sqrt{x}+8} \geq 0$.		
2.	Найдите область определения выражения $\sqrt{3-\dfrac{4}{x}}$.		
3.	В прямоугольном треугольнике *ABC* с катетами *AB* = 1 *BC* = 3 из вершины *B* проведены высота *BH* и биссектриса *BL*. Найдите площадь треугольника *BLH*.		
4.	Найдите общие корни уравнений $x^3-x-\sqrt{2}=0$ и $x^3+x^2-2-2\sqrt{2}=0$.		
5.	Решите уравнение $\sin 3x = \cos 5x$.		
6.	В правильном тетраэдре *SABC* с ребром 4 см точка *M* середина ребра *SB*. Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через точки *A*, *M* и параллельной прямой *SC*.		
7.	Решите неравенство $\lvert x^2-2x-3\rvert \leq 2(x+1)$.		
8.	В треугольнике *ABC* точки *M* и *N* расположены соответственно на сторонах *BC* и *AC* так, что *BM* : *MC* = *CN* : *NA* = 1 : 3. Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BN}$.		
9.	Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $(a^2-9)\cdot\sqrt{x}-a-3=0$ имеет хотя бы одно решение.		
10.	Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 5, 6, 7.		
11.	Найдите уравнение с целыми коэффициентами, имеющее корнем число $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.		
12.	В правильной пирамиде *SABCD* с вершиной *S* точки *M* и *N* расположены соответственно на ребрах *SA* и *CD* так, что *SM* : *MA* = *DN* : *NC* = 2 : 1, отрезок *MN* пересекается с плоскостью *SBD* в точке *P*. Найдите отношение *MP* : *PN*.		
13.	Найдите все пары натуральных чисел, произведение которых на 11 больше, чем умноженная на 7 их сумма.		
14.	Решите уравнение $2\sin x = \sqrt{\operatorname{tg}(\pi - x)}$.		
15.	Две окружности с радиусами 3 см и 4 см, расстояние между центрами которых равно 5 см, пересекаются в точках *A* и *B*. Через точку *B* проводится прямая, которая вторично пересекает эти окружности в точках *C* и *D*, и известно, что площадь треугольника *ACD* равна 21 см^2. Найдите *CD*.		
16.	Представьте многочлен $x^4-7x^3-x^2+21x-6$ в виде произведения двух многочленов степени меньше 4 с целыми коэффициентами.		

11 класс, май 2013 г.

Вариант 1

№	Задание	Ответ	Рез.
1.	Решите неравенство $\dfrac{x^3+1}{x^4-5x^2+4} \le 0$.		
2.	Найдите область определения выражения $\sqrt{x-\dfrac{4}{x}}$.		
3.	Решите неравенство $\sqrt{2x+3} \ge 2x+1$.		
4.	Найдите все решения уравнения $\cos^2 3x = \sin^2 2x$.		
5.	Решите неравенство $\log_{x+1} 3 < 2$.		
6.	Найдите $\int\limits_0^{\pi} \sin^2 2x \cdot dx$.		
7.	Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC, у которого $AB=5$ см, $AC=2\sqrt{3}$ см и $\angle BAC = 30^o$.		
8.	Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)=\sqrt{2x+3}-1$ в точке с абсциссой 3.		
9.	Из набора, содержащего монеты по 5 коп и по 10 коп, монету в 10 коп. можно выбрать с вероятностью $\dfrac{5}{7}$. После того как в набор добавили несколько монет по 5 коп, монету в 10 коп стало возможным выбрать с вероятностью $\dfrac{4}{11}$. Чему равно наименьшее число монет по 5 коп, которое могло быть добавлено?		
10.	В призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 точка M середина ребра BC, отрезок A_1M пересекается плоскостью ABC_1 в точке P. Найдите отношение $A_1P : PM$.		
11.	Решите уравнение $2\sin x + \sqrt{\mathrm{tg}(\pi + x)} = 0$.		
12.	Найдите все пары натуральных чисел, произведение которых на 91 больше, чем умноженная на 5 их сумма.		
13.	Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$ на промежутке $(0; \infty)$.		
14.	Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax=\sqrt{x-1}$ имеет единственное решение.		
15.	Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, точки M и N середины ребер BC и A_1B_1 соответственно. Найдите расстояние между прямыми CD и MN.		
16.	Решите уравнение $1+x^2+5\log_2^2 x = (2x+1)\cdot \log_2 x^2$.		

Вариант 2

№	Задание	Ответ	Рез.
1.	Решите неравенство $\frac{x^3-1}{x^4-6x^2+5} \ge 0$.		
2.	Найдите область определения выражения $\sqrt{4x-\frac{1}{x}}$.		
3.	Решите неравенство $\sqrt{3x+1} \ge 3x-1$.		
4.	Найдите все решения уравнения $\cos^2 x = \sin^2 4x$.		
5.	Решите неравенство $\log_{x-1} 2 < 3$.		
6.	Найдите $\int_0^{\pi} \cos^2 3x \cdot dx$.		
7.	Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC, у которого $AB = 4$ см, $AC = 3\sqrt{2}$ см и $\angle BAC = 135^o$.		
8.	Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{2x-1}+1$ в точке с абсциссой 5.		
9.	Из набора, содержащего монеты по 5 коп и по 10 коп, монету в 10 коп. можно выбрать с вероятностью $\frac{5}{9}$. После того как в набор добавили несколько монет по 5 коп, монету в 10 коп стало возможным выбрать с вероятностью $\frac{2}{7}$. Чему равно наименьшее число монет по 5 коп, которое могло быть добавлено?		
10.	В призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 точки M и N середины ребер BC и AA_1 соответственно, отрезок MN пересекается плоскостью ABC_1 в точке P. Найдите отношение $MP : PN$.		
11.	Решите уравнение $2\sin x + \sqrt{\operatorname{tg}(\pi - x)} = 0$.		
12.	Найдите все пары натуральных чисел, произведение которых на 99 больше, чем умноженная на 7 их сумма.		
13.	Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$ на промежутке $(0; \infty)$.		
14.	Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax = \sqrt{x-4}$ имеет единственное решение.		
15.	Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, точки M и N середины ребер BC и A_1B_1 соответственно. Найдите расстояние между прямыми A_1D_1 и MN.		
16.	Решите уравнение $4 + x^2 + 5\log_2^2 x = (x+1) \cdot \log_2 x^4$.		

Abstracts

About scientific-theoretical assumptions of the "Set", "Statement" and "Event" concepts in the school mathematics course (I)

Goncharov Sergey Savostiyanovich
S. L. Sobolev Institute of Mathematics
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
Russia, Novosibirsk, prospect of academic Koptyuga, 4, phone: (383) 333-28-92
Nikitin Alexander Alexandrovich
The Federal State Scientific Institution
«Institute of Pedagogic Investigations of Gifted Children»
of the Russian Academy of Education
Russia, Novosibirsk, edusoft@ngs.ru
Russia, Novosibirsk, Primorskaya Str., 22, phone (383) 345-80-21
Drobotun Boris Nikolayevich
S. Toraighyrov Pavlodar State University
Kazakhstan, Pavlodar, Lomov Str., 64, phone: (7182) 67-36-76

The article is devoted to the identification of genetic assumptions that caused the need for the set-theoretic, logic-algebraic and probability-theoretic concepts inclusion into the school mathematics education content and development of the theoretical bases that provide the possibility of constructing a unified methodical training system of these concepts. In this article an experience of identification of the general approach to the algebras of sets, the statements and events representation as the ideological and methodological basis for studying the concepts "Set", "Statement" and "Event" within school mathematics disciplines is offered.

Keywords: set, statement, event, Boolean algebra, algebra of statements, algebra of events, algebra of sets, Boolean function, homomorphism, isomorphism.

Attitude toward and quantifier operations on predicates (I)

Goncharov Sergey Savostiyanovich
S. L. Sobolev Institute of Mathematics
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
Russia, Novosibirsk, Koptyug pr., 4, phone: (383) 333-28-92
Nikitin Alexander Alexandrovich
The Federal State Scientific Institution
«Institute of Pedagogic Investigations of Gifted Children»
of the Russian Academy of Education
Russia, Novosibirsk, Primorskaya Str., 22, phone (383) 345-80-21, edusoft@ngs.ru
Drobotun Boris Nikolayevich
S. Toraighyrov Pavlodar State University
Kazakhstan, Pavlodar, Lomov Str., 64, phone: (7182) 67-36-76

This article presents the first part of the work devoted to the identification of the content and methodology of teaching the predicate logics elements by the means of school mathematics disciplines, such relationships by directions

are introduced; for the class of such relations there are defined the analogues of the design and cylinderification and on the basis of these operations with set-theoretic, logical and quantifier operations there are offered the description technologies of truth complex predicates domains that are defined by the effectively verifiable conditions.

Keywords: relations, projection operation, cylinderification operation, cylinder, predicate, truth domain.

The application of episteme-didactic units for evaluation and comparison of studies material levels

Nikitina Olga Alexandrovna

The Federal State Scientific Institution
«Institute of Pedagogic Investigations of Gifted Children»
of the Russian Academy of Education

Russia, Novosibirsk, edusoft@ngs.ru

In this paper an application of episteme-didactic estimates and comparisons of studies material levels from multilevel textbooks in mathematics for the fifth to eleventh grades of comprehensive school is presented.

Key words: episteme, episteme-didactic unit, level of studies, mathematics.

Centralized Testing in Mathematics

Mikheyev Yury Viktorovich

The Federal State Scientific Institution
«Institute of Pedagogic Investigations of Gifted Children»
of the Russian Academy of Education

Russia, Novosibirsk, edusoft@ngs.ru

The article presents the tests in mathematics developed by the «Institute of Pedagogic Investigations of Gifted Children» of Russian Academy of Education in order to check the knowledge of specialized classes Novosibirsk region students.

Keywords: mathematics, test, specialized class.

Steps to Professional Skills

Tikhonova Tatyana Ivanovna

«*A.P. Ershov Institute of Informatics Systems»,*
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

Russia, Novosibirsk, Acad. Lavrentjev pr., tanja@iis.nsk.su

The Summer School of Young Programmers is an event where the early introduction to the profession metodologies, the involvement of students to the teamwork skills with the use of modern information technologies and the encouragement of practical programming skills abilitites development are tested.

Keywords: information technologies, education, project activities, programming, informatics systems.

СОДЕРЖАНИЕ

В каждой научной статье, присылаемой в журнал, отдельным файлом должны быть указаны следующие данные (эти данные необходимы для обработки статьи в РИНЦ):

1. Сведения об авторах

Обязательно:

— фамилия, имя, отчество всех авторов полностью (на русском и английском языке);
— полное название организации — место работы каждого автора в именительном падеже, страна, город (на русском и английском языке). Если все авторы статьи работают в одном учреждении, можно не указывать место работы каждого автора отдельно;
— адрес электронной почты для каждого автора;
— корреспондентский почтовый адрес и телефон для контактов с авторами статьи (можно один на всех авторов).

Не обязательно:

— подразделение организации;
— должность, звание, ученая степень;
— другая информация об авторах.

Если какая-то часть обязательных сведений отсутствует, то автор (авторы) должен разрешить Издательству заменить их по своему усмотрению.

2. Название статьи

Приводится на русском и английском языках.

3. Аннотация

Приводится на русском и английском языках.

4. Ключевые слова

Ключевые слова или словосочетания отделяются друг от друга точкой с запятой. Ключевые слова приводятся на русском и английском языках.

5. Тематическая рубрика (код)

Обязательно — код УДК.

Не обязательно — другие библиотечно-библиографические предметные классификационные индексы.

6.Список литературы

Пристатейные ссылки и/или списки пристатейной литературы следует оформлять по ГОСТ 7.0.5-2008. Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления.

Контактные адреса и телефоны

Адрес: 630098, г. Новосибирск, ул. Приморская, 22, Федеральное государственное научное учреждение «Институт педагогических исследований одаренности детей» Российской академии образования

Тел. (383) 345-80-21,
Факс (383) 345-80-21
E-mail: edusoft@ngs.ru
www-сервер: http://*edusoft-rae.ru*/