

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

Учреждение Российской  
академии образования  
«Институт педагогических  
исследований одаренности детей»

# ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Научный журнал

Основан в октябре 2008 года

Том 4

Выпуск 3

2011

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ  
ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
ОДАРЕННОСТИ ДЕТЕЙ

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Научный журнал. 2011. Т. 4, вып. 3

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-36663 от 01 июля 2009г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор  
академик РАО *А. А. Никитин*

Заместители главного редактора  
к.ф.-м.н. *А. С. Марковичев*  
к.э.н. *О. А. Никитина*

Ответственный секретарь  
к.п.н. *Ю. В. Михеев*

Члены редколлегии:  
академик РАО *Ю. В. Сенько*  
чл.-корр. РАО *И. М. Бобко*  
чл.-корр. РАО *А. Ж. Жафяров*  
чл.-корр. РАО *В. Я. Синенко*  
к.п.н. *Г. А. Сапрыкина*

Оригинал-макет  
*Л.А. Дегтерева, Е.Н. Разинков*

Адрес редколлегии:  
630098, г. Новосибирск,  
ул. Приморская, д. 22  
Телефон: (383) 345-80-21  
E-mail: [edusoft@ngs.ru](mailto:edusoft@ngs.ru)

Подписано в печать 19.08.2011.  
Бумага офсетная №1. Формат 30 x 42/2.  
Гарнитура Times New Roman.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 39.  
Тираж 500 экз. Заказ № 07-11.

Издательство ИПИО РАО  
г. Новосибирск, ул. Приморская, д.22

© ИПИО РАО, 2011

# Перпендикуляры и углы на модели Пуанкаре неевклидовой геометрии Лобачевского

УДК 514.132

*Белонос Владимир Сергеевич, Козлов Валерий Васильевич,  
Мальцев Андрей Анатольевич, Марковичев Александр Сергеевич,  
Михеев Юрий Викторович, Никитин Александр Александрович,  
Фокин Михаил Валентинович*

*Учреждение Российской академии образования  
«Институт педагогических исследований одаренности детей»*

Россия, г. Новосибирск, ул. Приморская, д. 22, телефон: (383) 345-80-21

[edusoft@ngs.ru](mailto:edusoft@ngs.ru)

Данная статья является третьей в серии статей, посвященных представлению элементов неевклидовых геометрий в школьном курсе математики, рассчитанном на профильный или специализированный уровень обучения. Рассматривается понятие угла на модели Пуанкаре геометрии Лобачевского и приводится пример неевклидова треугольника, сумма углов которого меньше  $180^\circ$ .

*Ключевые слова:* обучение, математика, неевклидова геометрия, модель Пуанкаре, неевклидов угол.

## ***Углы на модели Пуанкаре.***

В статье [3] было представлено описание модели Пуанкаре неевклидовой геометрии Лобачевского и приведен ряд свойств прямых и отрезков, которые позволили продемонстрировать как сходство, так и отличие от геометрии Евклида. По аналогии с известным понятием угла в евклидовой геометрии неевклидовым углом считается фигура, образованная двумя неевклидовыми лучами с общим началом. Соответственно естественным образом вводятся понятия развернутого неевклидова угла, вертикальные и смежные неевклидовы углы, а также ставится задача о сравнении неевклидовых углов, в том числе и за счет введения меры. Как известно, в основе измерения заложено понятие равенства, что позволяет производить сравнение с некоторым выбранным эталоном. Поэтому для неевклидовых углов, как и в евклидовой геометрии, особое значение имеет прямой угол и, соответственно, перпендикулярность прямых.

Определим перпендикулярность неевклидовых прямых следующим образом.

*Две неевклидовы прямые взаимно перпендикулярны, если образующиеся при их пересечении неевклидовы углы равны.*

Каждый из углов, образующихся при пересечении неевклидовых перпендикулярных прямых, называют неевклидовым прямым углом. Прямой неевклидов угол принимают равным  $90^\circ$ .

Покажем, как на модели Пуанкаре проводить неевклидовы перпендикуляры к неевклидовой прямой.

**Пример 1.** Пусть даны неевклидова прямая  $a$ , которая изображается лучом с вершиной  $O$ , перпендикулярным абсолюту (прямой  $p$ ), и точка  $A$  (рис. 1). Опустим из точки  $A$  на прямую  $a$  неевклидов перпендикуляр. Для этого радиусом  $OA$  опишем полуокружность с центром в точке  $O$ . Она изображает неевклидову прямую  $b$ , проходящую через точку  $A$  и перпендикулярную данной неевклидовой прямой  $a$  (рис. 2). Для доказательства того, что прямая  $b$  перпендикулярна прямой  $a$ , достаточно установить, что угол  $\varphi$ , образованный неевклидовыми лучами  $BM$  и  $BA$ , равен своему смежному углу, образованному лучами  $BO$  и  $BA$ .

При симметрии относительно полуокружности  $b$  луч  $BM$  преобразуется в луч  $BO$ , а точки неевклидова луча  $BA$  остаются при этом неподвижными. Следовательно, угол  $\varphi$  равен своему смежному углу при неевклидовой прямой  $a$ , и поэтому неевклидовы прямые  $a$  и  $b$  перпендикулярны.

**Пример 2.** Пусть теперь неевклидова прямая  $a$  изображается полуокружностью радиуса  $r$  с центром  $O$  на прямой  $p$  (рис. 3). Чтобы из точки  $A$  опустить неевклидов перпендикуляр на неевклидову прямую  $a$ , на луче  $OA$  найдем точку  $A_1$ , для которой  $OA \cdot OA_1 = r^2$ .

Отрезок  $n = OA_1$  можно построить как четвертое пропорциональное  $\frac{OA_1}{r} = \frac{r}{OA}$  с помощью теоремы Фалеса (рис. 4), и затем евклидов отрезок  $OA_1$  отложить на луче  $OA$  (рис. 5). После этого через точки  $A$  и  $A_1$  проведем полуокружность с центром на прямой  $p$ , то есть неевклидову прямую  $b$  (рис. 6). Пусть  $B$  – точка пересечения ее с полуокружностью  $a$ . Точка  $B_1$ , симметричная точке  $B$  относительно окружности  $a$ , удовлетворяет условию  $OB \cdot OB_1 = r^2$ .

Так как  $OB = r$ , то  $OB_1 = r$ . Следовательно,  $B_1 = B$ . Таким образом, дуга  $BA$  преобразуется при симметрии относительно окружности  $a$  в дугу  $BA_1$ . Но это означает, что неевклидов угол  $ABC$  равен своему смежному углу  $A_1BC$ , а потому неевклидова прямая  $b$  перпендикулярна неевклидовой прямой  $a$ .

Далее, по аналогии с измерением углов в евклидовой геометрии, для процедуры измерения неевклидовых углов следует научиться от заданного неевклидова луча последовательно откладывать неевклидовы углы, равные заданному, а также делить неевклидовы углы на равные части (в частности, такая процедура должна быть применима и к эталонному неевклидову углу, и к его частям).

Сначала на примере покажем, как построить на плоскости Пуанкаре неевклидов угол, в два раза больший данного.

**Пример 3.** Рассмотрим на модели Пуанкаре неевклидов угол  $\alpha$ . Пусть одна сторона угла является лучом  $BA$  евклидовой прямой  $a$ , которая перпендикулярна прямой  $p$ , а другая

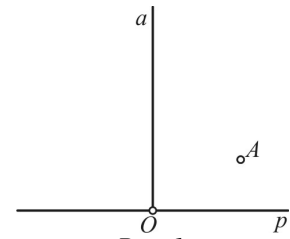


Рис. 1.

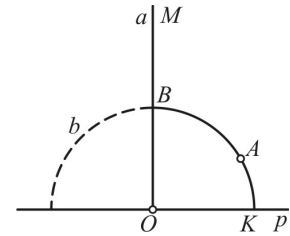


Рис. 2.

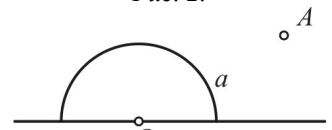


Рис. 3.

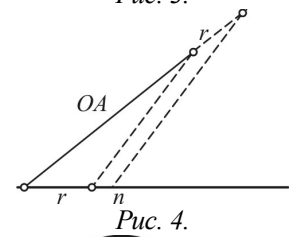


Рис. 4.

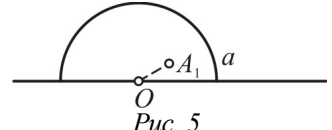


Рис. 5.

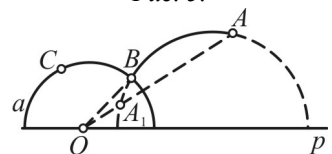


Рис. 6.

сторона угла – это дуга  $b$  полуокружности с центром  $O$  на прямой  $p$  (рис. 7).

Построим полуокружность  $c$  с центром на прямой  $p$ , которая проходит через точки  $O$  и  $B$  (рис. 8). При симметрии относительно окружности с дугой  $b$  прямая  $AB$  переходит в окружность с дугой  $c$ , а луч  $BA$  переходит в дугу  $BO$  полуокружности  $c$ . Так как при симметрии относительно  $b$  точки дуги  $BL$  переходят в себя, то неевклидов угол  $ABL$  переходит в неевклидов угол  $OBL$ . Следовательно, от неевклидова луча  $BL$  отложен угол  $OBL$ , который равен неевклидову углу  $ABL$ , а поэтому неевклидов угол  $ABO$  в два раза больше заданного.

На плоскости Пуанкаре реализуется также деление заданного неевклидова угла на два равных.

**Пример 4.** Построим на модели Пуанкаре неевклидов угол, градусная мера которого в два раза меньше прямого угла, то есть равна  $45^\circ$ .

Рассмотрим прямой неевклидов угол, как на рис. 9.

Проведем с центром в точке  $O$  и радиусом  $OA$  полуокружность, как на рис. 10, и рассмотрим неевклидовы углы  $CAL$  и  $OAL$ .

Если теперь будем удваивать угол  $CAL$ , как рассмотрено в предыдущем пункте, то в этом случае построение, приведенное на рис. 8, будет выглядеть так, как на рис. 10. Следовательно, неевклидовы углы  $CAL$  и  $OAL$  равны. Так как градусная мера суммы этих углов равна  $90^\circ$ , то следует считать, что каждый из неевклидовых углов  $CAL$  и  $OAL$  имеет градусную меру  $45^\circ$ .

В модели Пуанкаре градусную меру неевклидова угла можно определить также более естественным образом, приблизив к восприятию меры угла в евклидовой геометрии. Сделать это можно с помощью евклидовых касательных к евклидовым дугам окружностей, изображающих стороны неевклидова угла.

**Пример 5.** Рассмотрим прямой неевклидов угол, который был изображен на рис. 1.

Проведем к евклидовой окружности с центром  $O$  и радиусом  $OB$  касательную в точке  $B$  (рис. 11). Если за градусную меру неевклидова угла  $MBK$  принять градусную меру евклидова угла  $MBP$ , которая равна  $90^\circ$ , то это полностью согласуется с тем результатом, который был получен в примере 1.

**Пример 6.** Рассмотрим теперь половину неевклидова прямого угла – угол  $LAO$  на рис. 12.

К евклидовой окружности с центром  $B$  и радиусом  $BA$  проведем касательную  $AM$ , и к евклидовой окружности с центром  $O$  и радиусом  $OA$  проведем касательную  $AK$  (рис. 12). Так как  $\angle OAB = 45^\circ$  по построению, приведенному в примере 4, а  $MA \perp AB$ ,  $KA \perp AO$ , то  $\angle KAM$

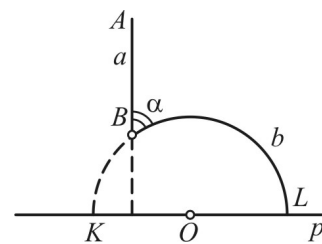


Рис. 7.

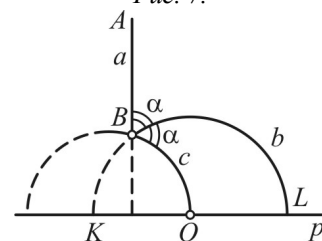


Рис. 8.

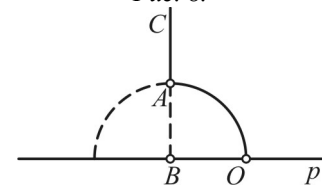


Рис. 9.

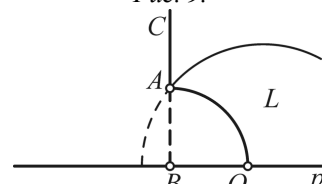


Рис. 10.

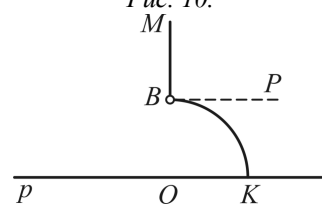


Рис. 11.

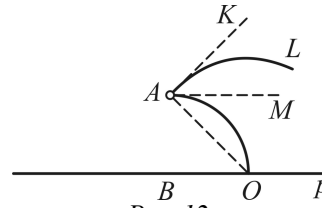


Рис. 12.

$= \angle OAB = 45^\circ$ . Поэтому за градусную меру неевклидова угла  $LAO$  принимают  $45^\circ$ . Это вполне соответствует тому, что неевклидов угол  $LAO$  равен половине прямого неевклидова угла.

**Пример 7.** Рассмотрим на рис. 13 неевклидов угол  $BAC$ , который получен следующим образом: луч  $DB$  проведен перпендикулярно прямой  $p$ , точка  $O$  выбрана так, что  $\angle OAD = 30^\circ$ , и с центром  $O$  и радиусом  $OA$  проведена полуокружность  $m$ .

Построим касательную  $AK$  к окружности  $m$ . Так как  $AK \perp AO$ , то  $\angle BAK = 60^\circ$ . Поэтому за градусную меру неевклидова угла  $BAC$  принимают  $60^\circ$ . Покажем, что этот результат вполне согласуется с процедурой измерения углов.

Сначала рассмотрим симметрию относительно окружности  $m$ . Луч  $DB$  при этой симметрии переходит в полуокружность  $n$  с центром на прямой  $p$ , проходящую через точки  $O$  и  $A$  (рис. 14). Так как евклидов треугольник  $OAP$  равносторонний, то центр полуокружности  $n$  совпадает с точкой  $P$ . Отсюда следует, что при симметрии относительно полуокружности  $m$  неевклидов угол  $BAC$  переходит в равный ему неевклидов угол  $OAC$ .

Рассмотрим теперь симметрию относительно окружности  $n$ . Так как окружность  $m$  проходит через центр  $P$  окружности  $n$ , то при этой симметрии окружность  $m$  перейдет в прямую  $DB$  (рис. 15). Отсюда вытекает, что при симметрии относительно полуокружности  $n$  неевклидов угол  $OAC$  переходит в равный ему неевклидов угол  $DAO$ . Таким образом, сумма трех равных неевклидовых углов  $BAC$ ,  $OAC$ ,  $DAO$  составляет неевклидов развернутый угол, что вполне согласуется с тем, что величина угла  $BAC$  равна  $60^\circ$ .

Рассматривая неевклидовы треугольники и его неевклидовы углы, можно обнаружить, что сумма всех этих углов всегда меньше  $180^\circ$ . Покажем это на примере.

**Пример 6.** Построим неевклидов треугольник с углами  $90^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $30^\circ$ .

Проведем сначала  $OA \perp p$ . Затем отложим на прямой  $p$  отрезок  $OK$ , равный отрезку  $OA$ , и проведем полуокружность с центром  $K$  и радиусом  $KA$ . В результате получим неевклидов угол  $OAL$ , равный  $45^\circ$  (рис. 16).

Проведем затем через точку  $O$  прямую  $m$  параллельно прямой  $AK$  до пересечения с дугой  $AL$  в точке  $B$ . Затем с центром в точке  $O$  и радиусом  $OB$  проведем полуокружность, пересекающую луч  $OA$  в точке  $C$ . В результате получим неевклидов треугольник  $ABC$ , у которого угол  $ACB$  прямой (рис. 17).

Докажем, что в неевклидовом треугольнике  $ABC$  угол  $ABC$  равен  $30^\circ$ . Для этого рассмотрим полностью окружность с центром  $K$  и радиусом  $KA$  (рис. 18). Так как  $AO \perp KL$  и

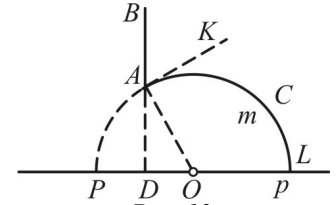


Рис. 13.

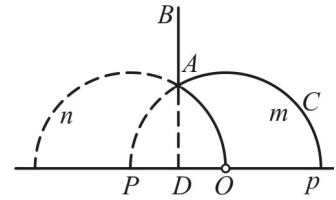


Рис. 14.

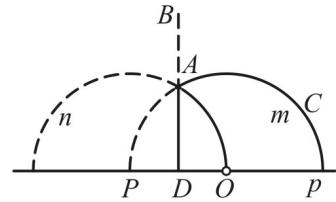


Рис. 15.

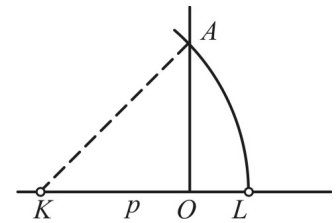


Рис. 16.

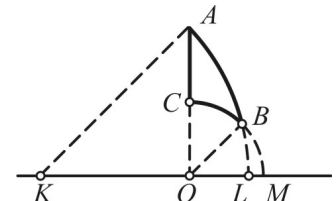


Рис. 17.

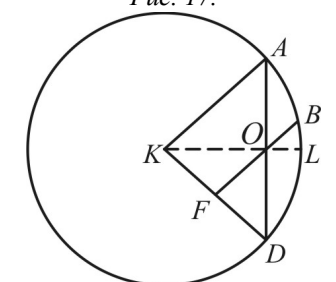


Рис. 18.

$\angle AKO = 45^\circ$ , то отсюда  $AO = OK = OD$ ,  $\angle AKD = 90^\circ$ . Так как  $OB \parallel AK$ , то  $OF \perp KD$ ,  $KF = FD$ . Следовательно, в евклидовом треугольнике  $BKD$  медиана  $BF$  является и высотой. Поэтому  $BD = BK = KD$ , то есть треугольник  $BKD$  равносторонний. Значит,  $\angle BKD = 60^\circ$ , откуда  $\angle KBO = 30^\circ$ .

Рассмотрим теперь касательные  $BQ$  к дуге  $BA$  и  $BP$  к дуге  $BC$  (рис. 19). Тогда  $BQ \perp BK$ ,  $BP \perp BO$ , откуда и следует, что  $\angle PBQ = \angle OBK = 30^\circ$ .

Таким образом, в построенном неевклидовом треугольнике  $ABC$  сумма внутренних углов меньше  $180^\circ$ .

Можно доказать, что сумма внутренних неевклидовых углов любого неевклидова треугольника меньше  $180^\circ$  и может быть сколь угодно малой. На рис. 20 продемонстрировано, что если рассмотреть неевклидов угол малой величины с вершиной  $B$  и выбирать точки  $A$  и  $C$  на его сторонах близко к граничной прямой  $p$ , то все углы неевклидова треугольника  $ABC$  будут иметь малую величину.

Если предполагать, что утверждение о сумме внутренних углов треугольника доказано, то отсюда следует, что сумма внутренних углов неевклидова  $n$ -угольника меньше  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ . Отсюда, в частности, следует, что если рассматривать неевклидовы четырехугольники, у которых все углы равны, то каждый из этих углов меньше  $90^\circ$ .

С понятием перпендикулярности можно связать также неевклидово перпендикулярное проектирование. При этом обнаруживается один эффект, который продемонстрируем на примере.

**Пример 7.** Рассмотрим на модели Пуанкаре неевклидов острый угол  $BAK$ , как на рис. 21. Покажем, что перпендикулярной проекцией его стороны  $AK$  на сторону  $AB$  является только часть стороны  $AB$ .

Неевклидовыми перпендикулярами к неевклидовой прямой  $AB$  являются полуокружности с центром  $O$ . Из этих полуокружностей пересекают неевклидову сторону  $AK$  угла  $BAK$  только такие, радиусы которых не меньше  $OA$  и меньше  $OD$ , где точка  $D$  получается в пересечении окружности с центром  $O$  и радиусом  $OK$  и прямой  $AB$  (рис. 22).

Следовательно, в неевклидовой геометрии проекцией стороны  $AK$  неевклидова угла  $BAK$  на сторону  $AB$  является отрезок  $AD$  с исключенной точкой  $D$ .

Можно доказать, что аналогичным свойством обладает любой острый угол на плоскости Лобачевского.

Одной из особенностей неевклидовой геометрии, которая значительно изменяет свойства фигур по отношению к евклидовой геометрии, является то, что в неевклидовой геометрии отсутствует понятие подобия, в том смысле, при котором одновременно сохраняется отношение соответственных отрезков и равенство соответственных углов.

Чтобы пояснить это, вернемся к примеру 6. Начиная с неевклидова угла  $AOL$  вели-

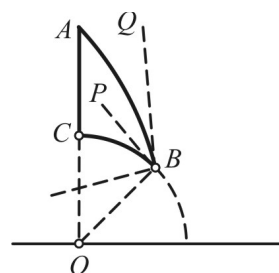


Рис. 19.

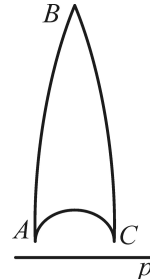


Рис. 20.

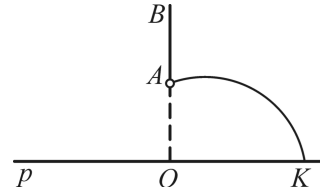


Рис. 21.

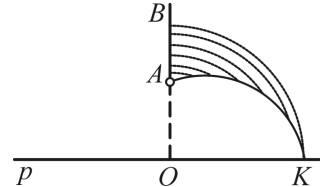


Рис. 22.

чиной  $45^\circ$ , можно пытаться по-разному строить неевклидов треугольник, у которого второй неевклидов угол равен  $90^\circ$  (рис. 23). В примере построение выполнялось так, что третий неевклидов угол получился равным  $30^\circ$ . Однако, в других случаях третий неевклидов угол не будет равен  $30^\circ$ , и особенно наглядно это проявляется, если неевклидову прямую с центром  $O$  проводить радиусом, чуть большим отрезка  $OL$ . Тогда величина третьего неевклидова угла будет маленькой.

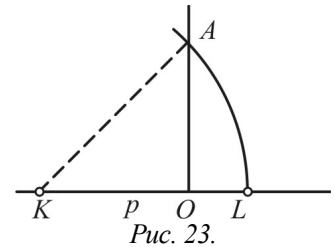


Рис. 23.

Отсутствие подобия в неевклидовой геометрии отражается на том, что традиционное для евклидовой геометрии введение понятия площади фигур с помощью палеток не реализуемо в новой геометрии. Напомним, что палеткой называют сетку из прямых, разбивающих плоскость на равные квадраты, при этом для каждой палетки можно рассмотреть более мелкую палетку, получающуюся из предыдущей разбиением каждого из квадратов на более мелкие квадраты. Покажем на примере, что аналогичный подход на модели Пуанкаре не реализуем.

**Пример 8.** Так как в неевклидовой геометрии нет четырехугольников, у которых все неевклидовы углы прямые, то вместо разбиения неевклидовой плоскости на «квадраты», рассмотрим более простое разбиение на неевклидовы равносторонние треугольники. Например, это удастся реализовать, если за основу взять неевклидов равносторонний треугольник  $ABC$ , все углы которого по  $45^\circ$ . Приставляя при вершине  $A$  равные ему неевклидовы треугольники  $ACD$ ,  $ADE$ , и т. д., получим, что при восьми таких треугольниках сумма углов при вершине  $A$  будет равна  $360^\circ$ , а поэтому такие треугольники покроют полностью окружение вокруг точки  $A$  (рис. 24).

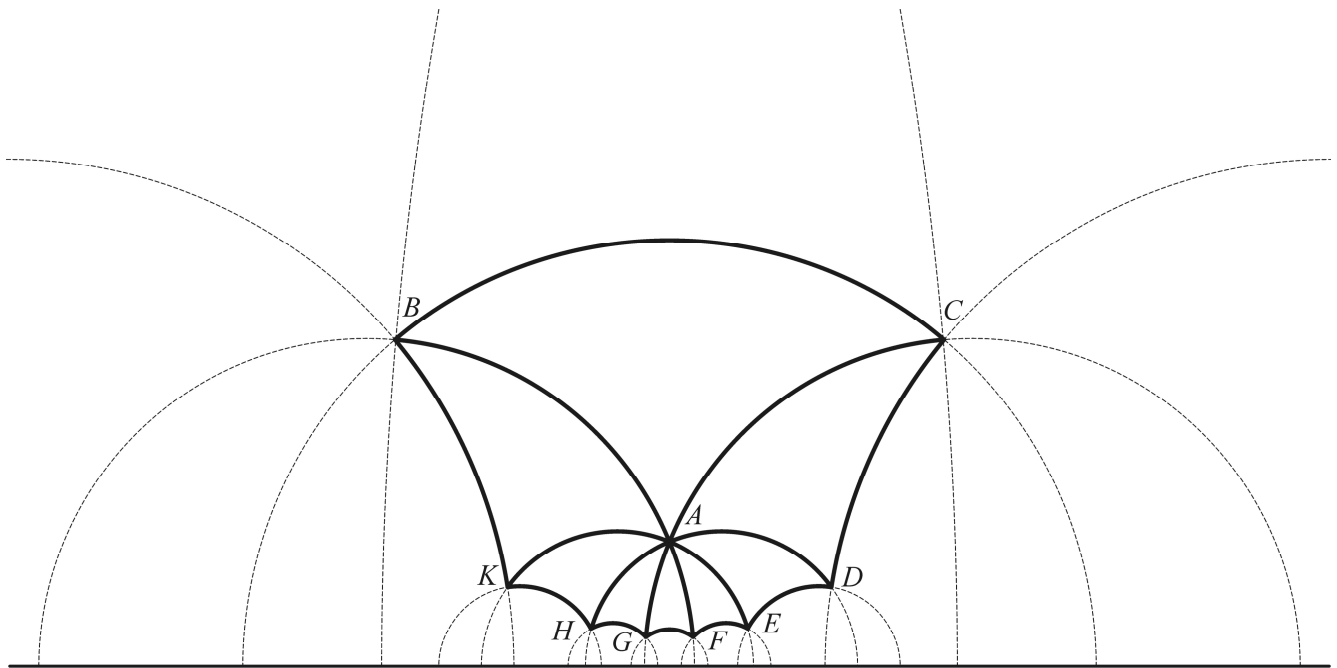


Рис. 24.

Аналогично можно пристраивать при вершине  $C$  неевклидовы треугольники, равные треугольнику  $ABC$ , и они полностью покроют окружение точки  $C$ , и так далее. В результате вся неевклидова плоскость будет разбита на равные неевклидовы треугольники. Как было



сказано выше, разбиение неевклидова треугольника  $ABC$  и других треугольников полученной сетки на более мелкие неевклидовы треугольники с такими же неевклидовыми углами, невозможно. Следовательно, рассмотреть по аналогии с последовательностью палеток на евклидовой плоскости последовательность измельчающихся сеток из неевклидовых треугольников и на их основе строить теорию площадей, в неевклидовой геометрии Лобачевского не реализуемо.

Аналог понятия площади для неевклидовых многоугольников удается получить на основе совсем других рассуждений. Для неевклидова треугольника рассматривается положительная величина  $S(\triangle ADC) = \pi - \angle ABC - \angle ACD - \angle BAC$ , где углы измеряются в радианах. Иногда эта величина называется дефектом углов неевклидова треугольника. Если неевклидов треугольник  $ABC$  разбить неевклидовой прямой, проходящей через вершину  $A$ , на два треугольника  $ABM$  и  $ACM$  (рис. 25), то легко проверяется, что  $S(\triangle ABM) + S(\triangle ACM) = S(\triangle ABC)$ . Аналогичное равенство выполняется и для площади на евклидовой плоскости. Далее, для каждого неевклидова  $n$ -угольника также можно рассмотреть дефект углов как разность между  $(n-2) \cdot \pi$  и суммой всех углов, и показать, что если неевклидов многоугольник разбит неевклидовой прямой на два неевклидовых многоугольника, то сумма дефектов частей равна дефекту самого многоугольника. Тем самым, на множестве неевклидовых многоугольников значение дефектов можно принимать за площади этих многоугольников, и основные свойства, присущие площади евклидовых фигур, будут выполнены и для неевклидовых многоугольников.

В очередной статье по неевклидовой геометрии будут представлены и другие ее особенности, относящиеся к неевклидовым окружностям и некоторым кривым нового вида, которые, с одной стороны, соответствуют привычным объектам евклидовой геометрии, а с другой стороны, резко отличаются по свойствам.

### ***Литература***

1. Розенфельд, Б. А., Яглом, И. М. Неевклидовы геометрии / Энциклопедия элементарной математики. Книга пятая – геометрия // Под. ред. П. С. Александрова, А. И. Маркушевича, А. Я. Хинчина. – М.: Наука, 1965. – С. 394-476.
2. Белоносов, В. С., Никитин, А. А. и др. Геометрия на сфере / Педагогические заметки. – Новосибирск: Изд. ИПИО РАО, 2010. – Т. 3. – выпуск 2. – 8 с.
3. Белоносов, В. С., Никитин, А. А. и др. Модель Пуанкаре неевклидовой геометрии Лобачевского / Педагогические заметки. – Новосибирск: Изд-во ИПИО РАО, 2011. – Т. 2 – выпуск 2. – С. 3-10.
4. Никитин, А. А. и др. Математика: Учебник для девярых классов средних общеобразовательных учебных заведений. Часть II. – Новосибирск: РИЦ НГУ, 2003. – 228 с.