

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

Учреждение Российской  
академии образования  
«Институт педагогических  
исследований одаренности детей»

# ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Научный журнал

Основан в октябре 2008 года

Том 4

Выпуск 2

2011

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ  
ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
ОДАРЕННОСТИ ДЕТЕЙ

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Научный журнал. 2011. Т. 4, вып. 2

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-36663 от 01 июля 2009г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор  
академик РАО *А. А. Никитин*

Заместители главного редактора  
к.ф.-м.н. *А. С. Марковичев*  
к.э.н. *О. А. Никитина*

Ответственный секретарь  
к.п.н. *Ю. В. Михеев*

Члены редколлегии:  
академик РАО *Ю. В. Сенько*  
чл.-корр. РАО *И. М. Бобко*  
чл.-корр. РАО *А. Ж. Жафяров*  
чл.-корр. РАО *В. Я. Синенко*  
к.п.н. *Г. А. Сапрыкина*

Оригинал-макет  
*Л. А. Дегтерева, Е. Н. Разинков*

Адрес редколлегии:  
630098, г. Новосибирск,  
ул. Приморская, д. 22  
Телефон: (383) 345-80-21  
E-mail: [edusoft@ngs.ru](mailto:edusoft@ngs.ru)

Подписано в печать 15.06.2011.  
Бумага офсетная №1. Формат 30 x 42/2.  
Гарнитура Times New Roman.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 51.  
Тираж 500 экз. Заказ № 04-11.

Издательство ИПИО РАО  
г. Новосибирск, ул. Приморская, д.22

© ИПИО РАО, 2011

# Модель Пуанкаре неевклидовой геометрии Лобачевского

УДК 514.132

*Белоносков Владимир Сергеевич, Козлов Валерий Васильевич,  
Мальцев Андрей Анатольевич, Марковичев Александр Сергеевич,  
Михеев Юрий Викторович, Никитин Александр Александрович,  
Фокин Михаил Валентинович*

*Учреждение Российской академии образования  
«Институт педагогических исследований одаренности детей»*

Россия, г. Новосибирск, ул. Приморская, д. 22, телефон: (383) 345-80-21

[edusoft@ngs.ru](mailto:edusoft@ngs.ru)

Данная статья является второй в серии статей, посвященных представлению элементов неевклидовых геометрий в школьном курсе математики. Содержит описание модели Пуанкаре неевклидовой геометрии Лобачевского и начальных свойств прямых и отрезков в этой геометрии.

*Ключевые слова:* обучение, математика, неевклидова геометрия, инверсия.

## ***Введение.***

Данная статья является второй в серии статей, посвященных представлению элементов неевклидовых геометрий в школьном курсе математики, рассчитанном на профильный или специализированный уровень обучения. В первой статье была представлена геометрия на сфере, которая по многим начальным свойствам прямых значительно отличается от геометрии Евклида.

Возникновение другой неевклидовой геометрии, которая по многим свойствам ближе к евклидовой геометрии, исторически связано с исследованиями Н. И. Лобачевского, который, отказавшись от постулата Евклида о существовании единственной прямой, проходящей через заданную точку и параллельной заданной прямой, на своем докладе об открытии новой геометрии в описательном плане представил отдельные результаты своего исследования, резко отличающиеся от того, что в течение тысячелетий зрительно воспринималось естественным образом. Поэтому первое выступление Н. И. Лобачевского не было воспринято математической общественностью. Ситуация изменилась только тогда, когда появились конкретные интерпретации неевклидовой геометрии, в которых привычными средствами в образах евклидовой геометрии удается наглядно представить особенности новой непривычной геометрии. Иногда вместо слова «интерпретация» используют слово «модель». Реализацию геометрии Лобачевского в конкретных образах обычно называют моделью геометрии Лобачевского.

В статье приводится начальный этап в построении одной из моделей неевклидовой геометрии Лобачевского.

## ***1. Пятый постулат Евклида.***

При изучении в школе параллельности прямых на плоскости мы особо выделяется пятый постулат Евклида.

Если две прямые пересекаются третьей так, что по какую-либо сторону от нее сумма внутренних углов меньше двух прямых углов, то по эту же сторону исходные прямые пересекаются.

Независимо от пятого постулата Евклида удастся доказать, что через любую точку  $A$ , не лежащую на прямой  $a$ , можно провести прямую, не пересекающую прямую  $a$  (то, что в

последующем в евклидовой геометрии считается прямой, параллельной прямой  $a$ ). Это можно сделать таким образом. Из точки  $A$  опустим перпендикуляр  $AB$  к прямой  $a$  (рис. 1), а затем через точку  $A$  проведем прямую  $b$ , перпендикулярную  $AB$  (рис. 2). После этого из единственности перпендикуляра к прямой, проведенного из заданной точки, вытекает, что прямые  $a$  и  $b$  не пересекаются.

Добавление пятого постулата Евклида приводит к единственности прямой  $b$ , проходящей через точку  $A$  и параллельной прямой  $a$ :

через любую точку  $A$ , не лежащую на прямой  $a$ , можно провести единственную прямую, параллельную  $a$ .

Это утверждение иногда называют *аксиомой параллельности* в евклидовой геометрии.

Если принять аксиому параллельности в качестве одного из основных свойств плоскости, то нетрудно доказать и пятый постулат Евклида.

Таким образом, с помощью пятого постулата Евклида можно получить аксиому параллельности, а с помощью аксиомы параллельности можно получить пятый постулат Евклида. Поэтому говорят, что пятый постулат Евклида эквивалентен аксиоме параллельности.

Пятый постулат Евклида в отличие от других аксиом Евклида менее очевиден, и в течение более, чем 2000 лет, многие математики пытались вывести его из других аксиом Евклида.

В 1826 г. наш гениальный соотечественник Николай Иванович Лобачевский в Казанском университете представил доклад о новой геометрии, которую он назвал воображаемой геометрией. Теперь она называется геометрией Лобачевского. Иногда геометрию Лобачевского называют неевклидовой геометрией. О существовании геометрии, отличной от геометрии Евклида, упоминал также немецкий математик Гаусс в письмах к современникам. В 1829 г., три года спустя после выхода в свет мемуара Лобачевского «О началах геометрии» венгерский математик Бойаи, не зная об открытии Лобачевского, также опубликовал работу по неевклидовой геометрии.

Система аксиом геометрии Лобачевского получается из системы аксиом Евклида простой заменой пятого постулата на аксиому Лобачевского:

перпендикуляр и наклонная, проведенные в плоскости к одной прямой, могут не пересекаться (рис. 3).

Геометрия Лобачевского имеет много общего с изучаемой нами евклидовой геометрией. Большинство утверждений, которые не связаны с понятием параллельности, имеют одинаковую формулировку в обеих геометриях. Приведем некоторые из таких общих утверждений:

- через любые две точки можно провести единственную прямую;
- две прямые либо не пересекаются, либо имеют только одну общую точку;
- на данном луче от его начала можно отложить отрезок, равный заданному отрезку;
- любой отрезок можно разделить на два равных отрезка;

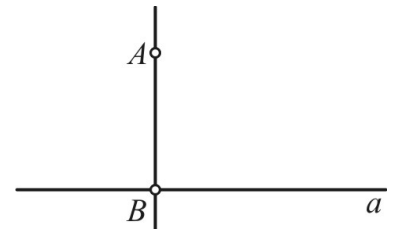


Рис. 1.

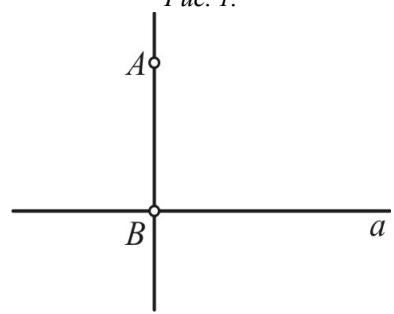


Рис. 2.

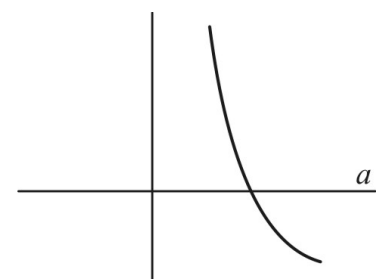


Рис. 3.

- каждый угол имеет определенную градусную меру;
- через любую точку можно провести единственный перпендикуляр к заданной прямой;
- если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны;
- каждую прямую можно превратить в числовую прямую, установив соответствие между действительными числами и точками этой прямой;
- в любой треугольник можно вписать окружность.

С другой стороны, геометрия Лобачевского имеет много особенностей, которые сильно отличаются от тех свойств, к которым мы привыкаем, изучая евклидову геометрию. Приведем некоторые из них:

- через любую точку  $A$ , не лежащую на прямой  $a$ , можно провести по крайней мере две прямые, не пересекающиеся с прямой  $a$ ;
- сумма углов любого треугольника меньше  $180^\circ$ ;
- можно построить треугольник, сумма углов которого меньше  $1^\circ$ ;
- если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны (четвертый признак равенства треугольников);
- в четырехугольнике с четырьмя равными сторонами и четырьмя равными углами каждый из углов меньше  $90^\circ$ ;
- существуют треугольники, вокруг которых нельзя описать окружность.

В 1868 г., почти через 50 лет после отмеченного выступления Лобачевского, итальянский математик Бельтрами обнаружил, что в евклидовом пространстве имеется поверхность, на которой кратчайшие линии ведут себя как прямые на плоскости Лобачевского. Эту поверхность (рис. 4) называют псевдосферой. Однако, такая модель трудна для изучения.

Из других первоначальных моделей неевклидовой геометрии Лобачевского широко известны две: модель А. Пуанкаре и модель Ф. Клейна, причем каждая из них имеет как достоинства, так и недостатки. В модели Клейна хорошо воспринимаются изображения прямых, однако равенство неевклидовых фигур моделируется с помощью некоторой группы проективных преобразований плоскости. Это обстоятельство создает большие трудности в адаптации модели Клейна для школьников. В отличие от этого, в модели Пуанкаре неевклидовы прямые выглядят весьма непривычно, однако равенство неевклидовых фигур моделируется с помощью инверсий, или симметрий относительно окружности. В отличие от проективных преобразований, инверсия и ее свойства вполне доступны мотивированным учащимся.

Перейдем к описанию точек и прямых в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

В евклидовой плоскости возьмем прямую  $p$ , (горизонтально расположенную на рис. 5). Точки верхней полуплоскости примем за точки плоскости Лобачевского, а самой плоскостью Лобачевского будем считать верхнюю полуплоскость евклидовой плоскости (рис. 5). При этом точки прямой  $p$  исключаются и не являются точками плоскости Лобачевского. Иногда граничную прямую  $p$  плоскости Лобачевского называют абсолютом.

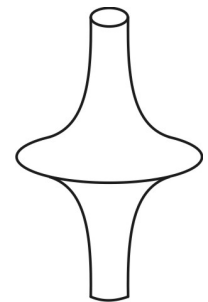


Рис. 4.

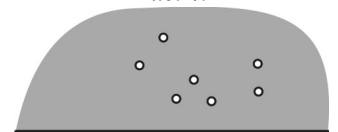


Рис. 5.

Прямыми плоскости Лобачевского считаются евклидовы полуокружности с центрами на прямой  $p$ , а также лучи с вершинами на прямой  $p$ , перпендикулярные прямой  $p$ .

Например, на рис. 6 изображены «прямые»  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

Прямые и фигуры плоскости Лобачевского, в отличие от евклидовых прямых и фигур, будем называть неевклидовыми.

Определенные таким образом неевклидовы прямые имеют ряд свойств, таких же, как и в геометрии Евклида.

Покажем, что через любые две точки  $A$  и  $B$  плоскости Лобачевского можно провести единственную неевклидову прямую. Для этого проведем серединный перпендикуляр  $m$  к отрезку  $AB$ .

Прямая  $m$  может не пересекать прямую  $p$ . В этом случае прямые  $m$  и  $p$  параллельны, а поэтому прямая  $AB$  перпендикулярна прямой  $p$ . Это значит, что луч  $KA$  на рис. 7 является неевклидовой прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$ . Другой такой неевклидовой прямой в виде полуокружности в этом случае не может быть, так как серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$  должен проходить через ее центр.

Прямая  $m$  может пересечь прямую  $p$  в некоторой точке  $O$ , как на рис. 8.

В этом случае полуокружность с центром  $O$  и радиусом  $OA$  является неевклидовой прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$ . Так как серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$  должен проходить через центр проходящей через точки  $A$  и  $B$  окружности, то другой такой неевклидовой прямой в виде полуокружности не может быть. Поскольку отрезок  $AB$  в этом случае не перпендикулярен прямой  $p$ , то не существует и неевклидовой прямой в виде луча, которая бы проходила через точки  $A$  и  $B$ .

Теперь сразу продемонстрируем отличие новой геометрии от геометрии Евклида. Покажем, что пятый постулат на модели Пуанкаре не выполняется. Для этого возьмем неевклидову прямую  $a$  и вне нее точку  $B$ . На рис. 9 неевклидова прямая  $a$  изображена лучом, перпендикулярным  $p$ . Проведем луч  $b_1$ , параллельный лучу  $a$ , и полуокружность  $b_2$  с центром на прямой  $p$ , касающуюся луча  $a$ . Тогда  $b_1$  и  $b_2$  изображают неевклидовы прямые, проходящие через точку  $B$  и не пересекающие неевклидову прямую  $a$ . Все неевклидовы прямые, проходящие через точку  $B$  и расположенные в заштрихованной области между  $b_1$  и  $b_2$ , не пересекают неевклидову прямую  $a$ .

На рис. 10 неевклидова прямая  $a$  изображена полуокружностью. Проведем неевклидовы прямые  $b_1$  и  $b_2$  в виде полуокружностей с центрами на прямой  $p$  и касающиеся полуокружности  $a$ . Все неевклидовы прямые, проходящие через точку  $B$  в заштрихованной области, не пересекают неевклидову прямую  $a$ .

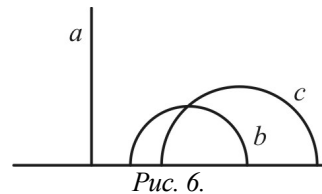


Рис. 6.

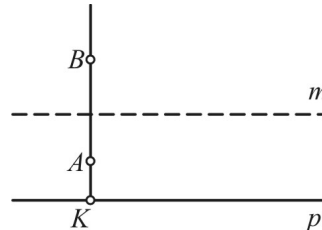


Рис. 7.

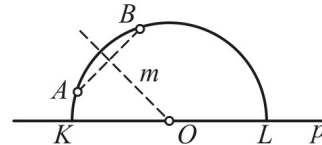


Рис. 8.

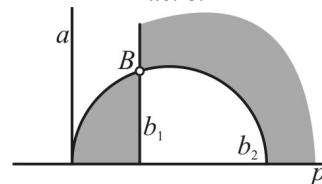


Рис. 9.

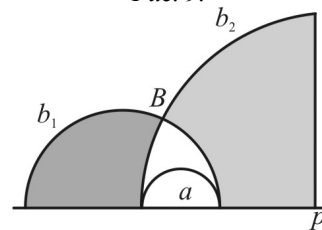


Рис. 10.

## 2. Равенство фигур в модели Пуанкаре.

Равенство фигур в модели Пуанкаре определяется с помощью симметрий относительно окружностей.

Напомним, что различные точки  $A$  и  $A_1$  называются симметричными относительно

прямой  $a$  в заданной плоскости, если отрезок  $AA_1$  перпендикулярен прямой  $a$  и делится прямой  $a$  пополам (рис. 11). Каждая точка прямой  $a$  симметрична сама себе относительно этой прямой.

Определим теперь симметрию относительно окружности. Пусть дана окружность радиуса  $r$  с центром  $O$  и точка  $A$ , отличная от точки  $O$ . Будем обозначать эту окружность греческой буквой  $\Sigma$  (сигма).

Точка  $A_1$  симметричная точке  $A$  относительно окружности  $\Sigma$ , определяется следующим способом, который рассмотрим в виде трех возможных случаев.

Первый случай. Пусть точка  $A$  лежит вне окружности. Тогда проведем касательную  $AB$  к окружности и из точки касания  $B$  опустим перпендикуляр на луч  $OA$ . Основание  $A_1$  этого перпендикуляра и есть искомая точка, симметричная точке  $A$  относительно данной окружности по определению (рис. 12).

Второй случай. Пусть точка  $A$  лежит внутри окружности  $\Sigma$ . Тогда к лучу  $OA$  в точке  $A$  восстановим перпендикуляр до пересечения с окружностью в некоторой точке  $B$ , а затем через точку  $B$  проведем касательную  $BA_1$  к окружности до пересечения в точке  $A_1$  лучом  $OA$  (рис. 13). Точка  $A_1$  и есть искомая точка, симметричная точке  $A$  относительно данной окружности.

Третий случай. Пусть точка  $A$  лежит на окружности  $\Sigma$ . Тогда точка симметрична самой себе, то есть  $A_1$  совпадает с  $A$ .

Сравнивая рисунки 12 и 13, видим, что если точка  $A_1$  симметрична точке  $A$ , то и точка  $A$  симметрична точке  $A_1$ , то есть точки  $A$  и  $A_1$  взаимно симметричны относительно окружности.

Заметим, что на рис. 12 радиус  $OB$  перпендикулярен касательной  $AB$ . Поэтому  $OA_1$  есть проекция катета  $OB$  прямоугольного треугольника  $ABO$  на гипотенузу  $OA$ . Следовательно, для точек  $A$  и  $A_1$  выполняется соотношение  $OA \cdot OA_1 = OB^2 = r^2$ .

Это соотношение выполняется и для точек  $A$  и  $A_1$  на рис. 13.

Для точки  $A$ , лежащей на данной окружности  $\Sigma$ , симметричная ей точка  $A_1$  совпадает с точкой  $A$ , а поэтому также выполняется соотношение  $OA \cdot OA_1 = OB^2 = r^2$ .

Следовательно, симметрию относительно данной окружности с центром  $O$  и радиусом  $r$  можно определить как преобразование, при котором каждая точка  $A$  отличная от точки  $O$ , переходит в точку  $A_1$  на луче  $OA$  такую, что  $OA \cdot OA_1 = r^2$  (рис. 14).

Рассмотренное в этом параграфе преобразование симметрии относительно окружности иногда называют *инверсией*. При этом точку  $O$  называют центром инверсии, число  $k = r^2$  называют степенью инверсии.

Если для каждой точки  $A$  фигуры  $F$  построить точку  $A_1$ , симметричную  $A$  относительно данной окружности  $\Sigma$ , то получим фигуру  $F_1$ , симметричную фигуре  $F$  (рис. 15).

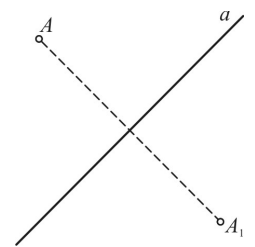


Рис. 11.

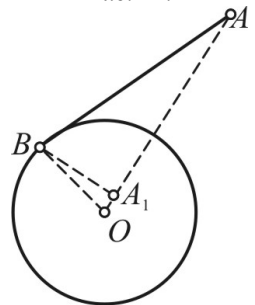


Рис. 12.

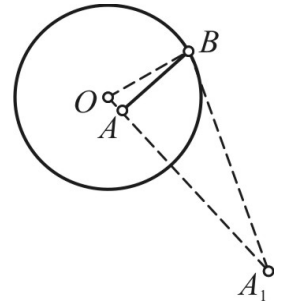


Рис. 13.

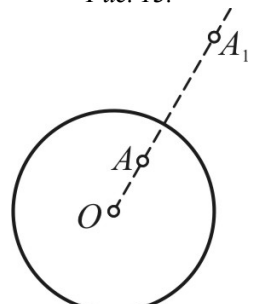


Рис. 14.

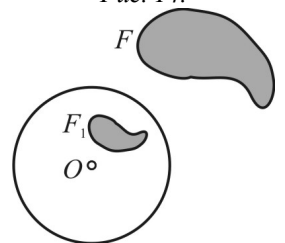


Рис. 15.

Говорят также, что фигура  $F$  преобразуется в фигуру  $F_1$  при симметрии относительно окружности.

Перечислим основные свойства симметрии относительно окружности, которые потребуются в дальнейшем.

Так как симметрия относительно окружности не определяется для центра  $O$  этой окружности, то всюду в дальнейшем будем предполагать, что при преобразовании любой геометрической фигуры мы точку  $O$  не рассматриваем.

Свойство 1. Прямая, проходящая через точку  $O$ , при симметрии относительно окружности преобразуется в себя (рис. 16).

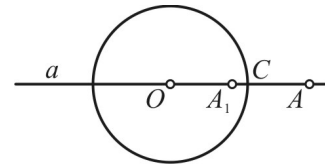


Рис. 16.

Свойство 2. Пусть точка  $A_1$  симметрична точке  $A$  и точка  $B_1$  симметрична точке  $B$  относительно окружности. Тогда  $\angle OAB = \angle OB_1A_1$  и  $\angle OBA = \angle OA_1B_1$  (рис. 17).

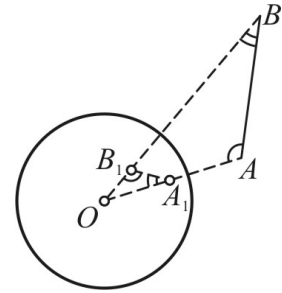


Рис. 17.

Свойство 3. Прямая, не проходящая через точку  $O$ , при симметрии преобразуется в окружность, проходящую через точку  $O$  (рис. 18).

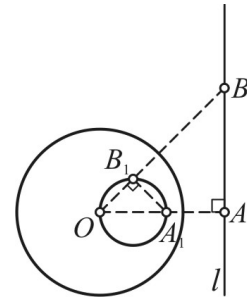


Рис. 18.

Свойство 4. Окружность, проходящая через точку  $O$ , преобразуется при симметрии в прямую, не проходящую через точку  $O$  (рис. 19).

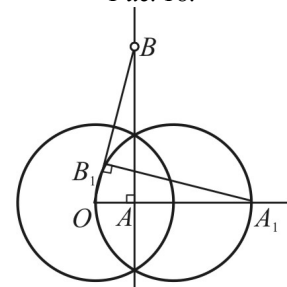


Рис. 19.

Свойство 5. Окружность, не проходящая через точку  $O$ , преобразуется при симметрии в окружность, также не проходящую через точку  $O$  (рис. 20).

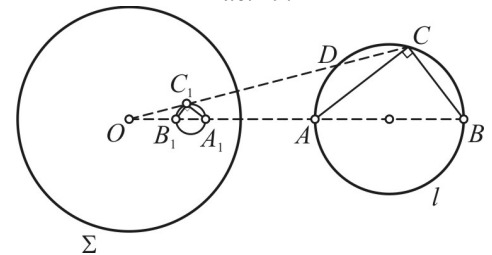


Рис. 20.

При симметрии относительно окружности две различные точки переходят в две различные точки. Отсюда следует, что общие точки двух фигур  $F$  и  $G$  переходят в общие точки симметричных им фигур  $F_1$  и  $G_1$ . При этом других общих точек фигуры  $F_1$  и  $G_1$  не имеют (напомним, что точка  $O$  исключается из рассмотрения).

Особо выделим случай преобразования окружности  $l$ , когда окружность пересекает окружность  $\Sigma$  в точках  $A$  и  $B$ , причем радиус  $OA$  перпендикулярен радиусу  $FA$  окружности  $l$ , проведенному в точку  $A$ . В этом случае касательные к окружностям  $\Sigma$  и  $l$  в точке  $A$  будут перпендикулярны друг другу. Поэтому говорят, что окружность  $l$  перпендикулярна окружности  $\Sigma$  (рис. 21). Иногда в этом случае говорят, что окружность  $l$  ортогональна окружности  $\Sigma$ .

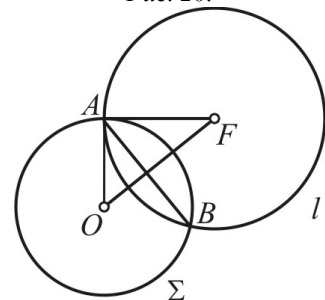


Рис. 21.

Свойство 6. Окружность  $l$ , ортогональная окружности  $\Sigma$ , преобразуется при симметрии в себя, причем ее внешняя дуга преобразуется во внутреннюю дугу и наоборот.

Приведем доказательство этого свойства. Пусть при симметрии относительно окружности  $\Sigma$  окружность  $l$  переходит в окружность  $l_1$ . Прямая  $OA$  проходит через центр окружно-



сти  $\Sigma$ , значит, она симметрична сама себе. Поскольку прямая  $OA$  – касательная к окружности  $l$ , то она должна быть касательной и к  $l_1$ . Таким образом, окружность  $l_1$  должна пройти через точки  $A$  и  $B$  и иметь в точке  $A$  касательную  $OA$ . Следовательно, центр окружности  $l_1$  должен лежать на перпендикуляре к  $OA$ , проведенном через точку  $A$ , и на линии центров, которая является серединным перпендикуляром к отрезку  $AB$ . Значит, центр окружности  $l_1$  совпадает с центром окружности  $l$ , откуда и следует утверждение, приведенное в свойстве 6.

Инверсия является основой для того, чтобы определить равенство неевклидовых фигур. Для этого сначала определяются перемещения неевклидовой плоскости. Главными видами *перемещений* неевклидовой фигуры  $F$  на модели Пуанкаре являются следующие:

- преобразование фигуры  $F$  в фигуру  $F_1$ , симметричную фигуре  $F$  относительно евклидовой прямой, перпендикулярной  $p$ ;
- преобразование фигуры  $F$  в фигуру  $F_1$ , симметричную фигуре  $F$  относительно евклидовой окружности с центром на прямой  $p$ .

Таким образом, основными видами перемещений в модели Пуанкаре являются симметрии относительно неевклидовых прямых.

Сформулируем теперь основное определение:

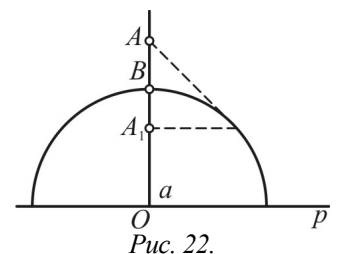
Две неевклидовы фигуры называются равными, если одну из них можно получить из другой последовательным выполнением неевклидовых перемещений.

Понятие равенства позволяет говорить о равенстве неевклидовых отрезков, неевклидовых углов, и т. д. В связи с этим приведем несколько примеров, относящихся к равенству неевклидовых отрезков.

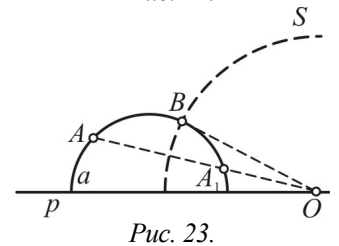
### Пример 1. Удвоение отрезка.

Пусть на неевклидовой прямой  $a$  дан отрезок  $AB$ , и требуется отложить на прямой  $a$  равный ему отрезок  $BA_1$  по другую сторону от точки  $B$ .

**Первый случай.** Пусть неевклидова прямая  $a$  изображается лучом с вершиной  $O$ , перпендикулярным  $p$  (рис. 22). Проведем окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $OB$ . Строим точку  $A_1$  симметричную точке  $A$  относительно этой окружности. Отрезок  $BA_1$  симметричен отрезку  $BA$ . Поэтому на плоскости Лобачевского эти отрезки равны по определению равенства фигур.



**Второй случай.** Пусть теперь неевклидова прямая  $a$  изображается полуокружностью с центром на прямой  $p$ . В точке  $B$  к этой полуокружности проведем касательную, пересекающую прямую  $p$  в точке  $O$  (рис. 23). Проведем вспомогательную окружность  $S$  радиуса  $OB$  с центром в точке  $O$ . Она будет ортогональна к окружности  $a$ .



Поэтому окружность  $a$  симметрична самой себе относительно окружности  $S$ . Точку  $A_1$  симметричную точке  $A$  относительно окружности  $S$ , можно получить как точку пересечения луча  $OA$  с полуокружностью  $a$ . И в этом случае на неевклидовой прямой  $a$  построен неевклидов отрезок  $A_1B$ , равный неевклидову отрезку  $AB$ .

### Пример 2. Бесконечность длины неевклидовой прямой.

Покажем, что на неевклидовой прямой  $a$  несколько отрезков, равных заданному на неевклидовой прямой  $a$  неевклидову отрезку  $AB$  этой прямой. При этом ограничимся только первым случаем, описанным в предыдущем примере.

Выполнив построение отрезка  $A_1B$ , равного отрезку  $AB$ , мы можем повторить указан-

ный процесс, и на дополнении луча  $A_1B$  отложить еще один отрезок  $A_1B_1$ , равный отрезку  $A_1B$ . Затем на дополнении луча  $B_1A_1$  можно отложить отрезок  $A_2B_1$  равный отрезку  $A_1B_1$  (рис. 24), и так далее.

Тем самым на неевклидовом луче  $AB$  последовательно можно отложить сколь угодно много отрезков, равных отрезку  $AB$ . В результате, если неевклидову отрезку  $AB$  сопоставить некоторую положительную длину, то неевклидова длина луча  $AB$  в направлении к прямой  $p$  будет неограниченной.

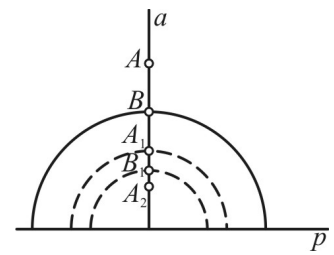


Рис. 24.

**Пример 3. Деление неевклидова отрезка пополам.**

Покажем, как неевклидов отрезок можно разделить пополам.

Первый случай. Пусть отрезок  $AB$  лежит на неевклидовой прямой  $a$ , которая изображается лучом  $OA$ , перпендикулярным прямой  $p$  (рис. 25).

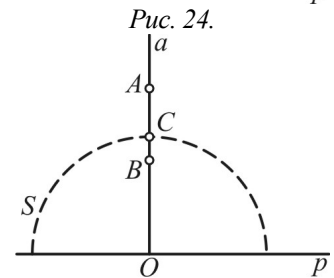


Рис. 25.

Радиусом  $r = \sqrt{OA \cdot OB}$  опишем полуокружность  $S$  с центром  $O$ . Тогда  $OA \cdot OB = r^2$ , и поэтому точка  $B$  симметрична точке  $A$  относительно окружности с центром  $O$ .

Пусть  $C$  – точка пересечения луча  $OA$  с этой окружностью. Тогда на модели Пуанкаре неевклидов отрезок  $AC$  равен неевклидову отрезку  $BC$  и поэтому точка  $C$  – середина неевклидова отрезка  $AB$ .

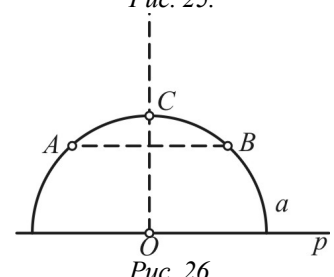


Рис. 26.

Второй случай. Пусть отрезок  $AB$  лежит на неевклидовой прямой  $a$ , которая изображается полуокружностью с центром на прямой  $p$ , а евклидова прямая, проходящая через точки  $A$  и  $B$ , параллельна прямой  $p$ . Тогда точки  $A$  и  $B$  симметричны относительно серединного перпендикуляра  $OC$  к евклидову отрезку  $AB$  (рис. 26).

Точка пересечения  $C$  этого перпендикуляра с полуокружностью  $a$  является серединой неевклидова отрезка  $AB$ , так как дуги  $AC$  и  $CB$  симметричны относительно луча  $OC$ , перпендикулярного  $p$ .

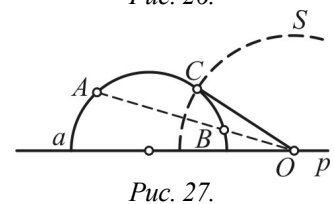


Рис. 27.

Точка пересечения  $C$  этого перпендикуляра с полуокружностью  $a$  является серединой неевклидова отрезка  $AB$ , так как дуги  $AC$  и  $CB$  симметричны относительно луча  $OC$ , перпендикулярного  $p$ .

Третий случай. Пусть теперь отрезок  $AB$  лежит на неевклидовой прямой  $a$ , которая изображается полуокружностью с центром на прямой  $p$ , а евклидова прямая  $AB$  пересекает  $p$  в точке  $O$  (рис. 27). Проведем из точки  $O$  касательную  $OC$  к полуокружности  $a$  и точку касания обозначим через  $C$ . Тогда полуокружность  $a$  будет ортогональна к окружности  $S$  с центром  $O$  и радиусом  $OC$ . Поэтому точка  $A$  будет симметрична точке  $B$  относительно окружности  $S$ . Таким образом, неевклидов отрезок  $AC$  равен неевклидову отрезку  $BC$  и точка  $C$  – середина неевклидова отрезка  $AB$ .

В следующих статьях по неевклидовой геометрии будут представлены и другие ее особенности.

**Литература**

1. Розенфельд, Б. А., Яглом, И. М. Неевклидовы геометрии / Энциклопедия элементарной математики. Книга пятая – геометрия // Под. ред. П. С. Александрова, А. И. Маркушевича, А. Я. Хинчина. – М.: Наука, 1965. – С. 394-476.
2. Белоносов, В. С. и др. Геометрия на сфере / Педагогические заметки. – Новосибирск: Изд. ИПИО РАО, 2010. – Т. 3. – выпуск 2. – 8 с.
3. Никитин, А. А. и др. Математика: Учебник для девярых классов средних общеобразовательных учебных заведений. Часть II. – Новосибирск: РИЦ НГУ, 2003. – 228 с.

# Методика диагностики результативности подготовки практико-ориентированных бакалавров (опыт ВКИ НГУ)

УДК 378.146:378.4(571.14)

*Валишев Абрик Ибрагимович, Кулакова Ирина Владимировна*  
Высший колледж информатики Новосибирского государственного университета,

Россия, г. Новосибирск, ул. Русская 35

[gen@ci.nsu.ru](mailto:gen@ci.nsu.ru)

*Никитин Александр Александрович*  
Учреждение Российской академии образования  
«Институт педагогических исследований одаренности детей»

Россия, г. Новосибирск, ул. Приморская, д. 22, телефон: (383) 345-80-21

[edusoft@ngs.ru](mailto:edusoft@ngs.ru)

Статья посвящена проблеме диагностики результативности подготовки бакалавров, отражающей профессиональные и профильно-ориентированные компетенции. Представлены результаты исследований, проведенных в Высшем колледже информатики Новосибирского государственного университета.

*Ключевые слова:* обучение, профессиональное образование, бакалавр, диагностика, компетенции.

С 2009 года с целью развития модели непрерывного образования «колледж-вуз» в Высшем колледже информатики НГУ реализуется пилотный проект подготовки практико-ориентированных бакалавров по направлению 230100 «Информатика и вычислительная техника» (профиль «Информационно-измерительные и управляющие системы»).

Проект осуществляется одновременно с переходом профессионального образования на ФГОС третьего поколения. В соответствии с основными принципами ГОС основная образовательная программа (ООП) формируется на основе компетентного подхода, при котором результаты освоения ООП выражены в достижении определенных компетенций. Исходя из этого, одной из основных задач проекта является – формирование профиля компетенций выпускника и измерение результативности обучения студентов пилотных групп с позиций достижения компетенций, отраженных в профиле. В статье представлены результаты работы, полученные в ходе исполнения проекта.

Под профилем компетенций выпускника в настоящей работе понимается совокупность профессиональных функций и спектра профессиональных компетенций, необходимых для их выполнения и относящихся к определенной специальности/профессии.

Общепризнанным является деление компетенций на два класса: класс общих, называемых также универсальных, ключевых, надпрофессиональных, и класс профессиональных. В свою очередь, профессиональные компетенции принято делить на общепрофессиональные в соответствии с видами деятельности и профильно-специализированные. Общепрофессиональные компетенции определяют набор способностей личности к теоретическому обучению, методологическому использованию теоретических основ для достижения результатов в профессиональной деятельности. Специализированные компетенции выражают профессиональный профиль выпускника, идентифицирующий его профессиональную деятельность в конкретной предметной области на соответствующем квалификационном уровне.

Общекультурные и профессиональные компетенции бакалавра по направлению подготовки 230100 «Информатика и вычислительная техника» отражены в новом ФГОС и с необходимостью включаются в профиль компетенций практико-ориентированного бакалавра по

профилю подготовки «Информационно-измерительные и управляющие системы». Что касается профильно-специализированных компетенций, то для формирования этого комплекса потребовалось изучить запросы работодателей. Главная задача, которая ставилась перед экспертными группами работодателей, состояла в выявлении и точной идентификации компетенций специалиста.

Первоначально был сформулирован список компетенций, предложенных профессорско-преподавательским составом ВКИ НГУ, на основании их опыта преподавания специальных дисциплин и знания современного производства. Далее произведен отбор экспертов. Это сотрудники институтов СО РАН и предприятий г. Новосибирска, представители следующих категорий:

- квалифицированный работник на уровне мастера или бригадира, непосредственно контактирующий со специалистом в области электронных устройств;
- специалист, инженер в области электронных устройств;
- представитель управляющего состава (высшего или среднего звена), имеющий глубокие профессиональные знания и свое видение возможного развития данной профессии;

Основными критериями при отборе экспертов были:

- непосредственное отношение к исследуемому вопросу и глубокое понимание профессиональной деятельности и требований к ней;
- достаточный опыт работы по данной профессии;
- осведомленность о (предполагаемом) развитии отрасли, включая ожидаемые изменения технологий;
- желателен опыт общения (взаимодействия) с молодыми специалистами, выпускниками вузов по данной специальности

Основным методом получения информации в данном исследовании явился анкетный опрос. В анкете представлен перечень компетенций, описание методики оценки значимости каждой из заявленной компетенций, их относительной важности и др. Эксперты могли дополнить список компетенциями, существенными с их точки зрения. Всего в экспертном опросе участвовало 15 экспертов.

В процессе анализа данных выполнено сравнение разработанной рабочей группой ВКИ НГУ модели специализированных компетенций с компетенциями, выделенными экспертами. Было установлено, что консолидированное представление рабочей группы и независимых экспертов относительно специализированных компетенций хорошо коррелируют. Анализ открытых вопросов показал, что отмеченные экспертами дополнительные умения, навыки, способности являются детализированными составляющими выделенных в модели рабочей группы блоков компетенций. Основная гипотеза о незначительном расхождении между представлением о профиле компетенций специалиста у экспертов и представителей вуза подтвердилась. На основе полученных данных сформирована рабочая модель специализированных компетенций выпускника, в которую вошли 25 компетенций.

Результаты работы представлены в профиле компетенций выпускника практико-ориентированного бакалавриата по профилю подготовки «Информационно-измерительные и управляющие системы». В названном профиле сформулированы основные виды профессиональной деятельности, перечень профессиональных задач, перечень профессиональных задач специалиста с профилем подготовки «Информационно-измерительные и управляющие системы», перечень требований к результатам освоения ООП (общекультурные компетенции, про-

фессиональные компетенции, профессионально-специализированные компетенции).

Сформированный перечень основных видов профессиональной деятельности и компетенций был согласован с представителями работодателей. Экспертами выступили Н. А. Колчанов, директор ИЦИГ СО РАН, академик РАН, А. М. Шалагин, директор ИАиЭ СО РАН, член-корр. РАН, Ю. В. Чугуй, директор КТИНП СО РАН, д.т.н., И. А. Травина, председатель Совета директоров НП Сибкадемсофт. В экспертном заключении отмечается, что представленная модель компетенций выпускника исчерпывающе полная, включает все необходимые для выполнения профессиональной деятельности качества, полностью соответствует содержанию профессиональных задач и может быть рекомендована для учебных заведений, реализующих образовательные программы прикладного бакалавриата по направлению подготовки «Информатика и вычислительная техника» (Информационно-измерительные и управляющие системы) в качестве основы для формирования ОПОП и рабочих программ, оценки результативности обучения.

Следующий этап в диагностике результативности подготовки практико-ориентированных бакалавров – оценка результативности обучения пилотной группы студентов.

Под результативностью обучения будем понимать меру эффективности обучения, характеризующуюся достижением результата/цели обучения или степенью приближения к ней.

Результативность измерима и должна иметь либо интегрированное в наиболее простом случае числовое значение, либо выражаться в значениях по заданной шкале. Она определяется значениями показателей, отражающих достижение конечного результата.

#### **Введем следующие показатели результативности.**

Прямые показатели результативности:

- традиционно мерой результативности обучения выступает оценка успеваемости, выраженная в абсолютных показателях, в процентном соотношении или какой-то другой форме;
- в компетентностной модели обучения мерой результативности выступает степень сформированности общекультурных, профессиональных и профессионально-специализированных компетенций студента.

Косвенные показатели результативности:

- степень удовлетворения потребностей основных целевых групп, в частности студентов в качественном образовании, измеряемую через степень удовлетворенности отдельными сторонами учебного процесса;
- конструктивность предложений по совершенствованию учебного процесса (выступает в качестве критерия знания учебного процесса, специальности, степени заинтересованности в повышении качества образования);
- знание будущей профессиональной деятельности, интерес к профессии.

Соответственно предметом исследования результативности являются: академическая успеваемость, самооценка уровня сформированности компетенций студентами, оценка студентами отдельных аспектов образовательного процесса, интерес к профессии, оценка преподавателями степени сформированности компетенций, мнения руководителей дипломных проектов о готовности студентов к выполнению профессиональных проектов.

Методами сбора информации выступают анкетный опрос, заполнение электронной базы данных, выполнение студентами оценочных заданий по дисциплинам или модулям.

В настоящее время в ВКИ НГУ идет процесс формирования УМК на основе компетентностного подхода. Важной задачей для преподавателей является выделение из всего профиля компетенций именно тех, которые формируются при изучении определенной дисциплины или профессионального модуля. Необходимый компонент поставленной задачи – разработка оценочных заданий для выявления уровня сформированности отобранных компетенций.

К настоящему времени для диагностики результативности подготовки практико-ориентированного бакалавра разработаны 3 анкеты: анкета студента, анкета руководителя дипломного проекта, анкета преподавателя (для электронной базы данных).

В качестве инструмента оценивания и сбора информации разработана электронная база данных «Учет успеваемости студентов, оценка компетенций студентов» (база данных рейтингов). Основное назначение данной базы данных это учет успеваемости студентов по предметам и учет оценивания степени сформированности общекультурных и профессиональных компетенций преподавателями.

С базой данных могут работать три вида пользователей:

- администратор;
- преподаватель;
- студент.

Администратор имеет полный доступ ко всем данным. Он может вводить информацию:

- о преподавателях;
- о предметах;
- о студентах;
- заполнять справочник компетенций;
- вводить текущие параметры базы данных (настройки), такие как: текущий год, текущий семестр;
- просматривать информацию об оценках за предметы по каждому студенту;
- просматривать информацию об оценках за компетенции, выставленные преподавателями.

Преподаватель, получив логин и пароль от администратора, может:

- войти в систему;
- вводить оценки по предметам каждому студенту;
- вводить оценки по компетенциям каждому студенту;
- просматривать оценки по предметам, в том числе средний балл за предметы и ведомость по группе;
- просматривать оценки за компетенции, в том числе экспресс-диагностику общекультурных и профессиональных компетенций, средний балл по компетенциям, среднеквадратическое отклонение.

Студент, получив логин и пароль от администратора, может:

- войти в систему;
- просматривать оценки по компетенциям (только для данного студента);
- экспресс-диагностику только этого студента;
- просматривать оценки по предметам (только группы данного студента);
- просматривать ведомость оценок по предметам по группе;

В настоящее время с помощью разработанного инструментария проводится сбор и обработка данных. Представленная методика может быть использована в практике подготовки практико-ориентированных бакалавров по любым специальностям.

### *Литература*

1. Никитин, А. А., Никитина, О. А. Сравнение учебных курсов с точки зрения условных зачетных единиц (кредитов) для различных уровней обучения с использованием эпистемного подхода / Педагогические заметки. – Новосибирск: Изд. ИПИО РАО, 2008. – Т. 1. – выпуск 1. – 14 с.
2. Никитин, А. А., Никитина, О. А. Сравнение математических и естественнонаучных дисциплин ВКИ НГУ с точки зрения условных единиц (кредитов) с использованием эпистемного подхода / Педагогические заметки. – Новосибирск: Изд. ИПИО РАО, 2009. – Т. 2. – выпуск 1. – 15 с.
3. Валишев, А. И., Никитин, А. А. Подготовка IT-специалистов в системе непрерывного образования НГУ «колледж-вуз» / Педагогические заметки. – Новосибирск: Изд. ИПИО РАО, 2010. – Т. 3. – выпуск 1. – 10 с.