РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

Учреждение Российской
академии образования
"Институт педагогических
исследований одаренности детей"

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Научный журнал

Основан в октябре 2008 года

Том 1

Выпуск 1

2008

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ОДАРЕННОСТИ ДЕТЕЙ

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Научный журнал. 2008. Т. 1, вып. 1

Оригинал-макет
Л.А. Дегтерева, Е.Н. Разинков

Адрес редколлегии:
630098, г. Новосибирск,
ул. Приморская, д. 22
Телефон: (383) 345-80-21
E-mail: edusoft@ngs.ru

Сдано в набор 10.10.2008. Подписано в печать 20.10.2008.
Бумага офсетная №1. Формат 60 х 84/8.
Гарнитура Times New Roman.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,75.
Тираж 500 экз. Заказ № 03-08.

Издательство ИПИО РАО
г. Новосибирск, ул. Приморская, д.22

ljb[eb`_ggu_ \uqbke_gby dZd hkgh\Z ij_ih^ gZqZe fZl_fZlbq_kdh]h ZgZebaZ \ kj_^g_c rdh

Ʌ.ɢ. ɅɊɨɬɨɞɶɹɤɨɜ, Ɏ.ɢ. ɎɈɬɨɞɨɤɨɞɶɨ, Ʒ.Ʌ. ɎɈɬɨɤɨ, Ɏ.Ɏ. ɌɈɬɨɞɨɤɨ

<_^_gb_

Более тридцати лет прошло с тех пор как элементы математического анализа были включены в программу школьного курса алгебры. Однако, несмотря на огромные усилия педагогов и большие материальные затраты, идеи и методы анализа пока недоступны большинству выпускников средних учебных заведений. Многолетний опыт приема вступительных экзаменов в НГУ показывает, что основная масса абитуриентов не понимает смысла таких понятий как предел, производная и др. В лучшем случае дело ограничивается умением формально дифференцировать простейшие явные выражения, но применять это умение к решению практических задач учащиеся не могут. Хуже того, сложившиеся у них ошибочные представления и неверные стереотипы приходится затем с большим трудом преодолевать при дальнейшем обучении в вузе. Это обстоятельство, в общем-то, никем серьезно и не оспаривается. «Неудобные» вопросы попросту исчезают из программ выпускных и вступительных экзаменов. Дело идет к тому, что начала анализа будут постепенно вытеснены на периферию школьного математического образования. В этой статье мы попытаемся проанализировать причины создавшегося печального положения и предложить пути выхода из него.

Мы полагаем, что одна из главных причин неудачи состоит в использовании формально-логического подхода и аксиоматических методов. Изложение основ анализа в большинстве существующих школьных учебников представляет собой адаптированный вариант вузовского курса, предназначенного для подготовки математиков-профессионалов. Разумеется, при построении логически непротиворечивых и полных математических теорий применение аксиоматических методов вполне оправдано и необходимо. Но это далеко не лучший способ для первого знакомства с предметом. Поясним сказанное несколькими наглядными примерами.

Невозможно представить себе курс арифметики натуральных чисел в начальной школе, начинающийся с перечисления аксиом Пеано. Подавляющему большинству людей, имеющих среднее и даже высшее образование, об этих аксиомах вообще ничего не известно. Однако данное обстоятельство ничуть не мешает им правильно применять арифметику в повседневной жизни. Вместо математически строгих определений они используют интуитивное представление о натуральных числах, сложившееся в результате решения большого числа разнообразных задач. Если это представление правильно или, как принято сейчас говорить, адекватно отражает основные свойства натуральных чисел, то оно оказывается вполне достаточным для большинства практических приложений. К аксиоматическим методам приходится прибегать лишь при решении внутренних проблем самой математической науки. Но это – прерогатива узкого круга специалистов.

Примерно так же происходит первое знакомство с понятием площади. Никому не приходит в голову начинать изучение площадей с изложения основ теории меры. Вместо этого рассматриваются простые и понятные задачи: как замостить участок одинаковыми квадратными

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант 07-06-00764а

плитами, сколько краски или обоев потребуется для ремонта квартиры, как разрезать геометрическую фигуру на части, из которых можно сложить квадрат, и так далее. В результате у школьников формируется представление о площади, достаточное для последующих приложений.

Ситуация, описанная в этих примерах, универсальна: введение любого фундаментального математического понятия обусловлено большой предварительной работой по формированию интуитивного представления о предмете. Такое представление в дальнейшем существенно облегчит понимание точных определений, которые будут восприниматься как простые и естественные, доступные большинству учащихся. Напротив, наглядное представление об объекте на основе формального определения может быть сформировано лишь при наличии соответствующих способностей, опыта работы с логическими конструкциями и специфического стиля мышления, характерного для профессионалов. Это принципиальное отличие в подходах новичков и профессионалов блестяще подмечено писателем А. Конан-Дойлом – дедуктивный метод Шерлока Холмса никак не давался доктору Ватсону.

Неудачное введение элементов анализа в курс школьной алгебры как раз и связано с неоправданным применением профессионального подхода. Почти без всякой предварительной подготовки учащимся предлагается к рассмотрению формальное определение предела – основного понятия математического анализа. Между тем это определение вовсе не очевидно. Оно впервые было сформулировано Коши в начале XIX века. До этого все основоположники математического анализа от Евдокса и Архимеда до Ньютона, Лейбница, Эйлера и др. пользовались в значительной степени интуитивными представлениями о предельном переходе, что не мешало им получать выдающиеся результаты. Понадобилось больше двух тысяч лет, чтобы прийти к современным формулировкам. Нет ничего удивительного, что они с трудом осознаются большинством неподготовленных учащихся средней школы.

Положение можно исправить, предварив формальные построения широким набором примеров предельных переходов, заимствованным из вычислительной практики. Беда в том, что здесь возможности преподавателей средних школ весьма ограничены, так как из программы изъяты приближенные вычисления, которые являются основой вычислительной математики. Вернув в программу понятия о точном и приближенном значениях, абсолютной и относительной погрешностях, о точности результатов арифметических операций с приближенными значениями, можно легко интерпретировать предельный переход как процесс построения приближений сколь угодно высокой точности. Существует много поучительных примеров такого рода, имеющих к тому же важное прикладное значение. Некоторые из них будут приведены ниже. Построение теории пределов на базе приближенных вычислений оправдано также и с исторической точки зрения, поскольку многие понятия и методы математического анализа возникли именно в связи с потребностями вычислительной математики.

Еще одна веская причина для возвращения приближенных вычислений в курс средней школы – широкое проникновение компьютеров во все сферы современной жизни. Думается, что каждый образованный член общества должен хотя бы в общих чертах представлять себе принципы работы этих устройств, что невозможно без знания элементарных основ вычислительной математики.

В следующих разделах излагается наше представление о новом курсе приближенных вычислений для средней школы и на его основе строится ряд примеров предельных переходов, которые можно использовать в педагогической практике.

Ijb[eb`_ggu_ \uqbke_gby \ rdhevghc fZl_fZlbd_

С приближенными значениями приходится постоянно сталкиваться в повседневной жизни. Обратимся, например, к вопросу об измерении величин. Эта задача совсем не проста даже тогда, когда измеряемые значения выражаются целыми числами, а само измерение сводится к счету. Точный ответ удается найти очень редко. Сравнительно просто пересчитать число учеников в классе или число страниц в не очень толстой книге. Однако сосчитать число волос на голове или число зерен в килограмме риса и при этом ни разу не ошибиться практически невозможно. В подобных ситуациях прибегают к специальным приемам, облегчающим процедуру счета, но дающим лишь приблизительное, ориентировочное значение. Например, можно сосчитать число зерен в одном грамме риса, а результат умножить на 1000. Получившееся значение, разумеется, не будет точным ответом, но оно даст наглядное представление об общем числе зерен в килограмме риса, вполне пригодное для решения многих практических задач. Важно понять, что попытки получить абсолютно точный результат в данном случае совершенно бессмысленны: стоит взять рис помельче или слегка ошибиться при взвешивании — и ответ станет другим. Вообще говоря, приближенное значение даже лучше, так как его легче себе представить и запомнить. К примеру, для описания количества зерен в килограмме риса число 220 000 гораздо удобнее, чем, например, число 223 561 или 218 734.

Далее, знания только одного приближенного значения величины чаще всего недостаточно. Всегда важно знать, насколько оно отличается от реального значения. Например, если знать, что нужный нам автомобиль стоит приблизительно 500 тысяч рублей, то, отправляясь за его покупкой, желательно иметь деньги с запасом. Если у нас будет 520 тысяч, а автомобиль стоит 535 тысяч рублей, то мы окажемся в неприятной ситуации. Поэтому приходится строить приближения сверху и снизу. Оценка величин сверху и снизу часто является основной в задачах математического анализа.

Напомним процедуру последовательных приближений и получения оценок сверху и снизу на примере задачи о взвешивании. Предположим, что нам нужно взвесить большое яблоко на чашечных весах, причем каждая гирька, находящаяся в нашем распоряжении, имеет массу 10 граммов. Поставив на одну чашку весов яблоко, а на другую 10 гирек, мы обнаружили, что яблоко перевесило. Значит, его масса больше 100 граммов. В таком случае 100 граммов будут приближением снизу (с недостатком) для неизвестной массы яблока. Сравним затем яблоко и 15 гирек. Допустим, что гирьки перевесят, тогда 150 граммов будут приближением сверху (с избытком) для массы яблока.

Найдя приближения сверху и снизу, мы сможем гарантировать, что искомая масса заключена между ними.

Результаты взвешивания можно уточнить, если выполнить дополнительные шаги в построении приближений, сравнивая вес яблока с другими наборами гирь. Например, имея в запасе гирьки массой в 1 грамм, описанную процедуру приближений можно повторить и обнаружить, что масса яблока принадлежит, например, промежутку от 127 до 128 граммов. Абстрактно говоря, процесс уточнения приближений можно продолжать сколь угодно долго и на каждом этапе получать некоторые приближения сверху и снизу.

Заметим, что точного значения массы яблока мы так и не находим. Каждый раз мы лишь устанавливаем границы интервала, в котором расположено это значение. Точное значение измеряемой величины принадлежит промежутку на числовой прямой, левым концом которого является приближение снизу, а правым приближение сверху. Если о величине больше ничего не известно, то она в принципе может оказаться равной [illegible] из этого промежутка. В анализе с этими понятиями связано понятие окрестности числа.

В прикладных задачах, относящихся к измерению величин, основным можно считать следующее правило:

[illegible].

При этом нужно учитывать природу измеряемых величин. Например, если речь идет о числе жителей в городе, то допустимые значения такой величины — положительные целые числа. Поэтому и приближенными значениями могут быть не какие угодно, а только натуральные числа из интервала между приближениями с избытком и недостатком.

После того как для некоторой величины a определены приближения a_1 снизу и a_2 сверху, вводятся понятия погрешности и абсолютной погрешности. А именно, обозначим через b какое-нибудь приближенное значение данной величины из промежутка $a_1; a_2$. [illegible] этого приближения называется разность $d \quad a \quad b$, [illegible] называется абсолютная величина (модуль) погрешности $|d| \quad |a \quad b|$. Зная приближение b и его погрешность d, точное значение нетрудно найти по формуле $a \quad b \quad d$.

Поскольку точное значение θ неизвестно, то и абсолютная погрешность того или иного приближения b также найдена быть не может. Тем не менее, в большинстве случаев ее можно [illegible], то есть найти число, заведомо превосходящее эту погрешность. Получение таких оценок исключительно важно в анализе, как с прикладной, так и теоретической точек зрения. Зная границы промежутка $a_1; a_2$ и приближение b, можно оценить абсолютную погрешность этого приближения по формуле

$$|a \quad b| \ \mathrm{d} \max(|a_1 \quad b|, |a_2 \quad b|).$$

Если известно, что абсолютная погрешность измерения величины a не больше некоторого числа p, то можно гарантировать, что разность между точным и приближенным значениями удовлетворяет неравенству $|a \quad b| \ \mathrm{d} p$, что равносильно двум неравенствам: $b \quad p \ \mathrm{d} a \ \mathrm{d} b \quad p$. Такой переход от одного неравенства к двум является важным техническим приемом на начальной стадии обучения математическому анализу.

На практике информацию о том, что b является приближенным значением величины θ с абсолютной погрешностью, не превосходящей p, часто записывают в символическом виде $a \quad b \ \mathrm{r} p$, что иногда можно видеть на шкалах измерительных приборов.

Абсолютная погрешность дает неполное представление о точности приближения. Допустим, например, что абсолютная погрешность при измерении некоторой длины равна одному сантиметру. Спрашивается, достаточно ли точно произведено измерение? Ответ на этот вопрос зависит от того, какая именно длина измерялась. Если это расстояние от Земли до Луны, то такая точность чересчур высока: достаточно было бы указать расстояние с точностью до тысячи километров. При измерении ширины классной комнаты точность в 1 см вполне удовлетворительна, а при измерении диаметра шестеренки в часовом механизме – явно недостаточна, здесь нужно учитывать даже доли миллиметра. По этим примерам видно, что говорить о большой или малой погрешности можно только в сравнении с самой измеряемой величиной. В связи с этим вводится понятие относительной погрешности, которое определяется для приближений, не равных нулю.

ʃ lsdztsfŋqʃlsjdz˩dzts? tʃtsGtєj ʰdztsfŋls˩ ᴮ tʃtєqʃвdzqʃɣ jdzqʃʷ b нdzʷ əjdzqʃɥqʃdz ʳ θ dzθʟ ʳəθjlsfŋʷ tslsdzts ʰjdzqʃj θв-fŋtsdz ᴮ lsdzts? tʃtsGtєj ʰdztsfŋlsqʃ ʢ dztsнbdz ᴮ fŋθdztsGts ˧ lstsGts tʃtєqʃвdzqʃɣ jdzqʃʷ.

Таким образом, если δ – относительная погрешность приближения b для величины a, то

$$\delta = \frac{|a - b|}{|b|}.$$

Относительная погрешность показывает, какую часть от результата измерения составляет ошибка. Эту часть можно выразить дробью, а можно в процентах. На практике используются оба способа записи относительных погрешностей.

Например, при вычислении относительной погрешности δ приближенного значения 6 для числа 6,27 по определению относительной погрешности получаем $\delta = \frac{|6,27 - 6|}{6} = 0,045$. В процентном выражении это составляет 4,5%.

Как и в случае с абсолютной погрешностью, если точное значение измеряемой величины неизвестно, то и относительную погрешность нельзя найти, а можно лишь оценить. Отметим, что из оценок абсолютной погрешности легко получаются оценки относительной погрешности, и наоборот.

Приближенные значения появляются не только при измерениях, но и при вычислениях. Допустим, например, что с помощью восьмиразрядного калькулятора нужно сложить числа 8,546392741 и 14,846729. Ясно, что сначала необходимо набрать первое из них на табло калькулятора. Но уже здесь возникает проблема – в этом числе слишком много цифр и они не помещаются на табло. Придется лишние цифры «отрезать», отбросить или, говоря научным языком, *tsʢtєbGdzqʃls˩ ɥqʃfŋdzts,* то есть заменить его приближенным значением с меньшим количеством цифр.

Сам способ десятичной записи положительного числа подсказывает, как надо строить эти приближения. Если просто оборвать дробь a = 8,546392741 на цифре какого-нибудь разряда, например, разряда тысячных, то она уменьшится и получится приближение снизу, то есть 8,546 < a. Если теперь добавить к дроби 8,546 единицу последнего сохранившегося разряда, то есть 0,001, то получится приближение сверху для числа a, то есть, a < 8,547. Найденные дроби называются десятичными приближениями числа a с точностью до одной тысячной.

Подобным же образом строятся десятичные приближения с точностью до одной сотой, одной десятой, одной десятитысячной или с точностью до единицы любого другого разряда после запятой. В анализе понятие десятичных или каких-то аналогичных приближений, с одной стороны, играет исключительно важную роль в построении теории действительных чисел, а с другой стороны – является наглядной моделью для постепенного формирования понятия предела числовой последовательности.

Десятичные приближения рассматривают также с точностью до единиц, десятков, сотен или других единиц старших разрядов. Эти приближения являются целыми числами, которые строятся по следующему правилу. Дробная часть отбрасывается совсем, а в целой части заменяются нулями все цифры, расположенные в младших разрядах, меньших указанной точности. В результате для положительных чисел получается десятичное приближение снизу. Например, для числа 2876672 десятичным приближением снизу с точностью до 1000 будет 2 876 000. Если увеличить это приближение на единицу последнего сохранившегося разряда, в данном случае на 1000, то получится 2 877 000 – десятичное приближение сверху с указанной точностью. В итоге при замене исходного числа 2 876672 любым из найденных приближений абсолютная погрешность не превышает 1000.

Десятичные приближения для отрицательных чисел находятся точно так же, как и для положительных, но с одним существенным отличием: при отбрасывании цифр младших разрядов получаются приближения сверху, а для получения приближения снизу от полученного приближения нужно отнять единицу соответствующего разряда. Так, для числа –3,18345 десятичными приближениями сверху и снизу с точностью до одной сотой будут соответственно –3,18 и –3,19.

С десятичными приближениями тесно связано важное с практической точки зрения понятие округления до определенного разряда или до определенного количества значащих цифр. При округлении из двух приближений – сверху и снизу – выбирают то, которое гарантирует меньшую абсолютную погрешность. В связи с этим устанавливается правило выбора соответствующего приближения, называемое [illegible].

[illegible] 5, [illegible] 5, [illegible].

Если придерживаться этого правила, то абсолютная погрешность округленного значения никогда не превзойдет пяти единиц старшего отброшенного разряда.

Предположим, что в результате некоторого вычисления или измерения найдено приближенное значение $a = 0{,}877825 \pm 0{,}01$. Спрашивается, имеет ли смысл сохранять в ответе все знаки после запятой у дроби 0,877825? Ведь погрешность этого приближения настолько велика, что истинное значение самого числа a может оказаться равным, например, 0,87 или 0,88. В данном случае сохранение всех шести знаков после запятой не дает никакой дополнительной информации о величине a. Более того, полученная запись затрудняет восприятие ответа. Каждое из чисел 0,87 и 0,88 дает такое же представление об искомой величине, как и 0,877825, но зато гораздо обозримее и легче запоминается.

По этим причинам, когда погрешность приближенного значения велика, его округляют, отбрасывая лишние знаки, не влияющие существенно на точность результата. Однако при этом погрешность округленного приближения может измениться. В связи с этим устанавливают правило изменения погрешностей при округлении приближений. Допустим, что $a = b \pm p$, и c – округленное значение приближения b, причем абсолютная погрешность этого округления не превосходит q. Тогда $b - p \le a \le b + p$, $c - q \le b \le c + q$. Отсюда и из свойств числовых неравенств вытекает $c - (p + q) \le a \le c + (p + q)$. Таким образом, абсолютная погрешность приближения c не больше $p + q$. В результате получилось правило:

[illegible].

На практике при округлении приближений оставляют в ответе столько значащих цифр, чтобы абсолютная погрешность округленного приближения была не больше пяти единиц старшего отброшенного разряда.

С приближенными значениями связано много интересных фактов из разных областей науки и культуры, на первый взгляд не имеющих отношения к математике. Например, вопросы о числе дней в году и вообще об устройстве календаря во многом имеют математическую природу. В самом деле, сколько же дней в году? В обычном году 365 дней. Но каждый четвертый год – високосный – содержит 366 дней. Спрашивается, почему годы разные? Ведь год – это время, за которое Земля совершает полный оборот вокруг Солнца. Вряд ли оно может регулярно меняться. А если покрепче задуматься, то и вообще удивительно, почему в году целое число дней. День или сутки – это время обращения Земли вокруг своей оси. Совершенно невероятно, чтобы этот промежуток времени уложился в году ровно 365 или 366 раз!

Все эти странности календаря напрямую связаны с ошибками округления. На самом деле число дней в году не равно ни 365, ни 366. Уже в далекой древности выяснилось, что это число – нецелое. Оно примерно равняется 365,25. Встречать Новый Год каждый раз в разное время суток неудобно. Поэтому число дней в году округляют до 365. Через год ошибка в летоисчислении составит 0,25 дня, через два – 0,5 дня, через три – 0,75, а через четыре «набегают» уже целые сутки. Это очень существенная погрешность. Чтобы ее исправить, раз в четыре года к самому короткому месяцу – февралю – добавляют лишний день. Так возникают високосные годы. По традиции високосными считаются годы, номера которых делятся на четыре.

В переводе с латинского «високосный» означает «дважды шестой». Древние римляне помещали лишний день не в конце февраля, а перед шестым днем до начала марта, то есть до мартовских *ξΘďjďн*. Отсюда, кстати, произошло и слово календарь.

Число дней в году, равное 365,25, также приближенное. Более точными измерениями установлено, что продолжительность года примерно составляет 365 суток 5 часов 48 минут и 46 секунд. Поэтому даже високосные годы не могут полностью исправить погрешности летоисчисления. Но теперь они становятся очень маленькими, и необходимость корректировки календаря возникает реже, чем раз в столетие.

При арифметических операциях с приближенными величинами погрешности могут возрастать и иногда достигают больших значений. Поэтому важно уметь заранее оценить погрешность результата, если известны погрешности отдельных операндов.

Пусть a_1 и a_2 – точные, а b_1 и b_2 – приближенные значения некоторых величин. Допустим, что абсолютные погрешности этих приближений не превосходят p_1 и p_2 соответственно. Тогда справедливы неравенства $b_1 - p_1 \le a_1 \le b_1 + p_1$, $b_2 - p_2 \le a_2 \le b_2 + p_2$. Складывая почленно эти неравенства, получаем

$$(b_1 + b_2) - (p_1 + p_2) \le a_1 + a_2 \le (b_1 + b_2) + (p_1 + p_2).$$

Следовательно, $|(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)| \le p_1 + p_2$, поэтому $b_1 + b_2$ является приближенным значением суммы $a_1 + a_2$, погрешность которого не превосходит $p_1 + p_2$. Таким образом, выполняется правило:

Θвfŋtsď ᵏ lsďΘʷ tʃtsɑɛj ʰďtsfŋls ʲ fŋlzďʒʳ tʃtɕɑвďɑʎ jďďʳ ꟷ ɩďΘɥjďɑʔ ďj tʃtɕjətsfŋꟷtsнɑls fŋlzďʒʳ Θвfŋtsďᵏ lsďʳ ꟷ tʃtsɑɛj ʰďtsfŋlsjʔ ξΘɣ нtsɑts fŋďΘɑΘjďʒtsɑts.

Понятно, что это правило распространяется на суммы трех, четырех или любого другого числа слагаемых.

Для оценки абсолютной погрешности разности приближенных значений аналогичным способом получается следующий результат:

Θвfŋtsďᵏ lsďΘʷ tʃtsɑɛj ʰďtsfŋlsʲ tɕΘɩďtsfŋlsɑ tʃtɕɑвďɑʎ jďďʳ ꟷ ɩďΘɥjďɑʔ ďj tʃtɕjətsfŋꟷtsнɑls fŋlzďʒʳ Θвfŋtsďᵏ lsďʳ ꟷ tʃtsɑɛj ʰďtsfŋlsjʔ lzďʒjďʲ ʰΘjďʒtsɑts ɑəʳɥɑlsΘjďʒtsɑts.

Пусть b – приближенное значение величины a, абсолютная погрешность которого не превосходит p, а число c – точное. Понятно, что произведение bc должно быть разумным приближенным значением для [illegible], Оценим погрешность этого приближения. Для этого запишем очевидное неравенство $|a - b| \le p$ и умножим его на $|c|$. Используя свойства модуля, получим $|ac - bc| = |(a - b)c| = |a - b| \cdot |c| \le p \cdot |c|$. В результате приходим к следующему правилу:

[illegible]

Рассмотрим теперь произведение двух приближенных значений. В этом случае оценка абсолютной погрешности произведения через абсолютные погрешности сомножителей сложна и неудобна. По этой причине устанавливают достаточно простые приближенные формулы для относительных погрешностей.

Пусть a_1 и a_2 – положительные числа, b_1 и b_2 – их положительные приближенные значения, а q_1 и q_2 – соответствующие относительные погрешности. Будем считать q_1 и q_2 настолько малыми, что их произведением $q_1 \cdot q_2$ можно пренебречь по сравнению с суммой $q_1 + q_2$.

По определению относительной погрешности имеем $b_1 \cdot (1 - q_1) \le a_1 \le b_1 \cdot (1 + q_1)$, $b_2 \cdot (1 - q_2) \le a_2 \le b_2 \cdot (1 + q_2)$. Так как выражения в левых и правых частях этих неравенств положительны, то их можно почленно перемножить:

$$b_1 \cdot b_2 \cdot (1 - q_1) \cdot (1 - q_2) \le a_1 \cdot a_2 \le b_1 \cdot b_2 \cdot (1 + q_1) \cdot (1 + q_2).$$

Раскрывая скобки, получим $(1 + q_1) \cdot (1 + q_2) = 1 + q_1 + q_2 + q_1 \cdot q_2$. Если пренебречь малым произведением $q_1 \cdot q_2$, то окажется, что $(1 + q_1) \cdot (1 + q_2) \approx 1 + q_1 + q_2$. Точно так же выводится, что $(1 - q_1) \cdot (1 - q_2) \approx 1 - q_1 - q_2$. Таким образом, можно приближенно считать, что

$$b_1 \cdot b_2 \cdot (1 - (q_1 + q_2)) \le a_1 \cdot a_2 \le b_1 \cdot b_2 \cdot (1 + (q_1 + q_2)),$$

следовательно,

$$\frac{|a_1 a_2 - b_1 b_2|}{b_1 b_2} \le q_1 + q_2.$$

Получилось приближенное, но вполне пригодное для практических целей правило:

[illegible]

Данное правило позволяет оценить не только относительную, но и абсолютную погрешность произведения (также не с гарантией). В самом деле, абсолютная погрешность равна произведению приближенного значения и его относительной погрешности, поэтому $|a_1 a_2 - b_1 b_2| \le b_1 b_2 \cdot (q_1 + q_2)$.

Отметим одну важную особенность. Полученное правило, вообще говоря, неверное и его применение иногда может приводить к неправильным выводам. Тем не менее, оно очень удобно, на практике к ошибкам приводит крайне редко, а поэтому его используют в абсолютном большинстве случаев. Нетрудно понять, что это приближенное правило сохраняет силу для любого числа сомножителей.

При делении приближенных значений относительная погрешность частного также не превосходит суммы относительных погрешностей делимого и делителя. Доказательство этого правила довольно сложное, поэтому мы его не приводим.

В вычислительной математике для произведений и отношений приближенных величин также приходится рассматривать оценки погрешностей, но в отличие от указанных выше упрощенных правил применяются более точные результаты. В качестве примера рассмотрим, как можно точно оценить разность между произведением величин и произведением их приближений. Пусть a_1 и a_2 – положительные числа, b_1 и b_2 – их положительные приближенные значения, а p_1 и p_2 – соответствующие абсолютные погрешности. Тогда

$$|a_1a_2 - b_1b_2| = |(a_1a_2 - a_1b_2) + (a_1b_2 - b_1b_2)| \le$$
$$\le a_1 \cdot |a_2 - b_2| + b_2 \cdot |a_1 - b_1| = a_1 \cdot p_2 + b_2 \cdot p_1 \le (b_1 + p_1) \cdot p_2 + b_2 p_1,$$

откуда $|a_1a_2 - b_1b_2| \le b_1p_2 + b_2p_1 + p_1p_2$.

Заметим, что если известны только оценки абсолютных погрешностей, то есть $p_1 \le m_1$, $p_2 \le m_2$, то $|a_1a_2 - b_1b_2| \le b_1m_2 + b_2m_1 + m_1m_2$. Это неравенство также позволяет оценить абсолютную погрешность произведения приближенных величин.

При помощи введенных выше понятий и правил можно получить несколько приближенных формул, позволяющих относительно просто выполнять достаточно сложные арифметические операции, такие как деление, извлечение корней и др. Фактически эти формулы – ни что иное как формулы Тейлора первого или второго порядков. Однако во многих случаях их легко вывести без применения высшей математики, а при наличии хороших оценок погрешностей они вполне пригодны для практических расчетов. Приведем несколько наглядных примеров.

Пример. Деление – очень трудоемкая операция. Особенно, когда приходится делить многозначные числа. Оказывается, существуют формулы, позволяющие найти приближенное значение частного при помощи сложений, вычитаний и умножений.

Чтобы разделить число b на число a, достаточно вычислить обратную к a величину a^{-1}, после этого деление сведется к умножению. Рассмотрим простейший случай, когда ищется число, обратное близкому к единице.

Пусть задано близкое к единице число a. Представим его в виде $a = 1 + x$, где значение $|x|$ достаточно мало. Например, пусть $|x| \le 0,25$, так что величиной x^2 можно пренебречь по сравнению с $|x|$. Составим обратную к $1 + x$ дробь $\frac{1}{1+x}$, а затем умножим ее числитель и знаменатель на $1 - x$. В результате получим

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1-x}{1-x^2}.$$

Если пренебречь малым слагаемым $(-x^2)$ в знаменателе последней дроби, то ее величина также мало изменится и получится приближенная формула $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$.

Для применения этой формулы на практике необходимо знать ее погрешность, то есть оценку модуля разности между левой и правой частями. Нетрудно видеть, что

$$\left|\frac{1}{1+x}-(1-x)\right|=\frac{x^2}{1+x}\le\frac{x^2}{0,75}=\frac{4x^2}{3}.$$

В следующей таблице показано, насколько малым должен быть модуль x, чтобы погрешность ε рассматриваемой приближенной формулы не превосходила заданного значения.

ε	0,1	0,05	0,01	0,001	0,0001
$\lvert x\rvert$	0,27	0,19	0,086	0,027	0,0086

Совсем исключать деление из обихода, конечно же, нет никакого смысла. Во всяком случае, деление десятичных дробей на 2, на 5 или на 10 выполняется достаточно просто. Покажем, что разумное сочетание приближенных методов с делением на небольшие целые числа очень часто позволяет находить отношения произвольных величин с достаточной степенью точности. Например, вычислим отношение $3,62/4,12$.

Преобразуем эту дробь так, чтобы стало возможным использование полученной выше приближенной формулы. Сначала разделим на 4 числитель и знаменатель искомой дроби, а затем представим ее как произведение числителя и величины, обратной к знаменателю:

$$\frac{3,62}{4,12}=\frac{0,905}{1,03}=0,905\cdot\frac{1}{1,03}\approx 0,905\cdot(1-0,03)\approx 0,88.$$

Погрешность этого результата не превосходит 0,02.

Пример. Рассмотрим вопрос об извлечении квадратных корней при помощи элементарных арифметических действий и без использования вычислительной техники. Сначала научимся извлекать корни из чисел, близких к единице. Составим выражение $\sqrt{1+x}$ и подберем подходящую приближенную формулу для его вычисления. Как и ранее будем считать, что $|x|\le 0,25$. При этом предположении значение x^2 мало по сравнению с $|x|$.

Преобразуем подкоренное выражение $1+x$, выделив в нем квадрат суммы двух чисел. Для этого прибавим к нему и вычтем из него слагаемое x^2. Применив затем формулу квадрата суммы, получим $1+x=(1+\frac{x}{2})^2-\frac{x^2}{4}$. Пренебрегая малым слагаемым $\frac{x^2}{4}$, превратим точное равенство в приближенное $1+x\approx(1+\frac{x}{2})^2$, откуда $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}$. Это и есть искомая приближенная формула. Как и в предыдущем примере, ограничимся тем, что без обоснований приведем таблицу погрешностей, необходимую для практического применения последней формулы.

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$\lvert x\rvert$	0,25	0,2	0,07	0,02	0,007

Разные искусственные приемы позволяют использовать полученную формулу для достаточно точного извлечения квадратных корней чуть ли не из любых положительных чисел. Например, вычислим с помощью полученной формулы приближенное значение квадратного корня из 28. Ближайшим к 28 квадратом целого числа является 25. Представим 28 в виде суммы этого квадрата и небольшого (по сравнению с 25) добавка: $28=5^2+3=5^2\cdot(1+0,12)$. Отсюда

$\sqrt{28} = 5\sqrt{1+0{,}12}$. Последний квадратный корень найдем по приближенной формуле: $\sqrt{1+0{,}12} \approx 1+0{,}06$. Как следует из таблицы для оценки точности, погрешность этого результата не больше 0,001. По правилу умножения точного и приближенного значений находим ответ $\sqrt{28} \approx 5 \cdot 1{,}06 = 5{,}3$ с погрешностью, не превосходящей $5 \cdot 0{,}001 = 0{,}005$. Во многих задачах такая точность нас вполне устроит.

Элементы теории пределов

Наглядное представление о предельном переходе удобно составить на основе традиционной интерпретации каждого действительного числа α как бесконечной десятичной дроби, не оканчивающейся бесконечным рядом девяток: $\alpha = \pm\alpha^0,\alpha^1\alpha^2\ldots$. Здесь $\pm$ – один из возможных знаков данного числа, α^0 – модуль целой части числа α, а $\alpha^k, k = 1,2,\ldots$ – десятичные разряды (цифры). Каждой последовательности действительных чисел $\alpha_n = \pm\alpha_n^0,\alpha_n^1\alpha_n^2\ldots, n = 1,2,\ldots$ и любому номеру k соответствует последовательность целых чисел $\{\alpha_n^k\}_{n=1}^{\infty}$, которую назовем k-ой координатной последовательностью.

Начнем с определения сходимости к нулю. Пусть $\{\alpha_n\}$ – какая-нибудь числовая последовательность. Будем говорить, что

[illegible] $\{\alpha_n\}$ [illegible]

Последнее означает, что в каждой координатной последовательности имеется лишь конечное число ненулевых элементов. Это представление о пределе вполне соответствует точному определению по Коши, но в то же время оно гораздо нагляднее: при возрастании номера n каждый из десятичных знаков числа α_n рано или поздно обратится в нуль и в дальнейшем уже не изменится.

Нетрудно сообразить, что данное определение равносильно следующему:

[illegible]

Отсюда уже совсем просто вывести почти классическое понятие:

[illegible] $\{\alpha_n\}$ [illegible] k [illegible] N, [illegible] $n \geq N$ [illegible] $|\alpha_n| < 10^{-k}$.

Наконец, последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится к числу α (или α является пределом последовательности $\{\alpha_n\}$), если последовательность разностей $\{\alpha_n - \alpha\}$ стремится к нулю. Заметим, что, в отличие от сходимости к нулю, это определение вовсе не означает, что десятичные знаки чисел α_n стабилизируются к соответствующим знакам числа α. Простейшим противоречащим примером является последовательность 0,9, 0,99, 0,999, …, сходящаяся к единице.

Мы, однако, не будем сосредотачиваться на манипуляциях с изложенными формулировками, а в соответствии с заявленной во введении точкой зрения постараемся привести несколько наглядных примеров, помогающих уяснить смысл понятия предельного перехода. При этом мы без доказательства воспользуемся известными теоремами о пределах суммы, произведения и промежуточной последовательности, которые, впрочем, элементарно вытекают из приведенных определений.

Рассмотрим вопрос о решении уравнения $f(x)=0$, где f – строго монотонная и непрерывная функция, заданная на отрезке $[a,b]$. Оставив пока в стороне обсуждение точного определения непрерывности, ограничимся интуитивным представлением о том, что графиком непрерывной функции является непрерывная кривая.

Если концы такой кривой лежат по разные стороны от оси абсцисс, то есть $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, то кривая обязательно пересечет ось абсцисс в некоторой точке $x=c$. Предположение о монотонности гарантирует единственность этой точки. Таким образом, уравнение $f(x)=0$ имеет на промежутке $[a,b]$ единственное решение $x=c$. Наша задача – найти приближенное значение решения с любой наперед заданной точностью.

Простейшим классическим методом приближенного решения уравнений является так называемый «метод деления пополам». Он состоит в следующем. Выберем в качестве первого приближения к искомому значению c середину отрезка $[a,b]$, то есть точку $c_1=\frac{a+b}{2}$. Понятно, что погрешность этого приближения не превосходит половины длины отрезка $[a,b]$:

$$|c-c_1|\le\frac{b-a}{2}.$$

Если такая точность нас устраивает, то задача решена. Если же нет, то вычислим значение $f(c_1)$. Может случиться так, что $f(c_1)=0$. Это означает, что точное решение уже найдено и дальнейшие поиски следует прекратить. В противном случае одна из половин $[a,c_1]$ или $[c_1,b]$ исходного промежутка будет обладать тем же свойством, что и весь промежуток, то есть на концах этой половины функция f принимает значения разных знаков. Обозначим эту половину через $[a_1,b_1]$ и вновь повторим приведенное выше рассуждение применительно к этой половине. В результате получим второе приближение к искомому решению $c_2=\frac{a_1+b_1}{2}$, погрешность которого оценивается так:

$$|c-c_2|\le\frac{b_1-a_1}{2}=\frac{b-a}{2^2}.$$

Если нужная точность достигнута, то процесс прекращается. Если нет, то продолжается далее. В итоге мы либо найдем на некотором очередном шаге точное решение, либо получим последовательность приближений $c_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ с погрешностями

$$|c-c_n|\le\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}=\frac{b-a}{2^n}.$$

Очевидно, что при возрастании номера n эта погрешность стремится к нулю и может быть сделана сколь угодно малой, если номер n достаточно велик. Пусть, например, изначально заданная точность равна 0,001, $a=1$, $b=2$, тогда для достижения заданной точности достаточно десяти шагов метода деления пополам.

Понятно, что построенная последовательность $\{c_n\}$ стремится (сходится) к искомому решению c исходного уравнения.

`В IV веке до н.э. древнегреческий математик и астроном Евдокс Книдский изобрел так называемый «метод исчерпывания», который в течение многих столетий успешно применялся для вычисления площадей фигур с криволинейными границами. Суть метода такова: данная фигура приближается (исчерпывается) последовательностью расширяющихся фигур, составленных из простых элементов, площади которых легко сосчитать. Предел последовательности площадей исчерпывающих фигур как раз и равен искомой площади криволинейной фигуры. Можно сказать, что этот метод явился прообразом современного интегрального исчисления. Приведем пример применения метода исчерпывания, правда, не в древней, а современной трактовке.

Вычислим площадь фигуры F, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 0$ и $x = a$ ($a > 0$). Для этого разобьем отрезок $[0, a]$ оси абсцисс на n равных частей точками $x_k = ka/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Через точки деления проведем вертикальные отрезки до пересечения с параболой. Длины этих отрезков равны $x_k^2 = (ka/n)^2$.

Построим теперь две фигуры F_n' и F_n'', первая из которых содержится в F, а вторая, наоборот, содержит F. Фигуру F_n' составим из прямоугольников с основаниями $[x_k, x_{k+1}]$ высоты x_k^2, а фигуру F_n'' – из прямоугольников с теми же основаниями, но высоты x_{k+1}^2 ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) Понятно, что искомая площадь $S(F)$ заключена между площадями $S(F_n')$ и $S(F_n'')$ построенных фигур:

$$S(F_n') \le S(F) \le S(F_n'').$$

Иными словами, $S(F_n')$ и $S(F_n'')$ являются приближениями снизу и сверху для искомого значения $S(F)$.

Площади $S(F_n')$ и $S(F_n'')$ легко подсчитать, если воспользоваться известной формулой

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

которую нетрудно доказать по индукции. Имеем

$$S(F_n') = \frac{a}{n}\cdot\frac{a^2}{n^2} + \frac{a}{n}\cdot\frac{(2a)^2}{n^2} + \cdots + \frac{a}{n}\cdot\frac{[(n-1)a]^2}{n^2} = \frac{a^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2) = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2},$$

$$S(F_n'') = \frac{a}{n}\cdot\frac{a^2}{n^2} + \frac{a}{n}\cdot\frac{(2a)^2}{n^2} + \cdots + \frac{a}{n}\cdot\frac{(na)^2}{n^2} = \frac{a^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2}.$$

В результате для искомой площади $S(F)$ при любом натуральном n получаем оценки

$$\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2} \le S(F) \le \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2}.$$

Левая и правая части последнего неравенства имеют общий предел $\dfrac{a^3}{3}$, следовательно,

$$S(F) = \frac{a^3}{3}.$$

Рассмотрим еще один вычислительный алгоритм, так называемый метод последовательных приближений, заключающийся в последовательном улучшении каждого получающегося приближенного значения. Ограничимся одним примером, известным уже несколько тысячелетий. Это – вавилонский способ приближенного вычисления квадратных корней.

Допустим, что нам известно некоторое приближенное значение x_1 для $\sqrt{a}$, $a > 0$. Тогда $x_1^2 \approx a$, откуда $x_1 \approx \dfrac{a}{x_1}$, поэтому $\dfrac{a}{x_1}$ тоже является приближенным значением для $\sqrt{a}$. Но тогда и среднее арифметическое $\dfrac{1}{2}\cdot(x_1 + \dfrac{a}{x_1})$ – также приближенное значение для $\sqrt{a}$. Оказывается, что последнее приближение точнее, чем x_1. На этом и основан метод последовательных приближений: выбирая произвольно положительное число x_1 и вычисляя последовательно при каждом натуральном n число $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cdot(x_n + \dfrac{a}{x_n})$, мы получаем последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к $\sqrt{a}$. Самое интересное, что такой способ достаточно быстро дает очень точные результаты. Например, если взять $a = 3$, $x_1 = 2$, то через десять шагов получится значение, которое отличается от $\sqrt{3}$ меньше, чем на 10^{-1000}.

Перейдем к оценкам погрешности $(n+1)$-го приближения. Имеем

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n}.$$

Отсюда следует, что все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная со второго, не меньше $\sqrt{a}$, поэтому для $n > 1$ получим

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{x_n - \sqrt{a}}{2x_n}\cdot(x_n - \sqrt{a}) = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n})(x_n - \sqrt{a}) < \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{a}).$$

Это означает, что при увеличении номера n на единицу погрешность приближения уменьшается более чем вдвое. Следовательно, погрешность стремится к нулю, а последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу, равному $\sqrt{a}$.

Метод последовательных приближений используется не только при извлечении квадратных корней. Это вообще один из самых эффективных способов решения уравнений и не только алгебраических, но и, например, дифференциальных. В соответствующей литературе можно найти достаточное количество примеров. Мы же ограничимся только первым знакомством с этим замечательным методом.

Заключение

Итак, в настоящей работе мы постарались обосновать необходимость возвращения приближенных вычислений в программу школьного курса. Это мотивируется, с одной стороны, всеобщей компьютеризацией и желанием ознакомить учащихся с исходными понятиями вычислительной математики, а с другой стороны, создает основу для формирования представлений о фундаментальных методах математического анализа, базирующихся на теории пределов. Достижение этих целей требует соответствующей модификации традиционного курса приближенных вычислений. Надеемся, что нам удалось это показать. Приведенные в работе примеры и технические приемы, разумеется, могут быть существенно расширены и дополнены. Здесь открываются неограниченные возможности для педагогического творчества.